ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

проф. Н. К. Верещагин

1/2 года, 1 курс, 2 семестр.

1. Элементы теории множеств.

1. Равномощность множеств. Свойства счётных множеств.
2. Сравнение мощностей. Теорема Кантора–Бернштейна.
3. Теорема Кантора $|P(A)| > |A|$.
4. Частично упорядоченные множества, линейно упорядоченные множества, вполне упорядоченные множества, начальные отрезки и их свойства.
5. Трансфинитная индукция и трансфинитная рекурсия.
6. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
7. Аксиома выбора. Теорема Цермело.
8. Лемма Цорна.
9. Равенства $|A| + |A| = |A| \times |A| = |A|$ для бесконечных множеств A.

2. Пропозициональная логика.

10. Пропозициональные формулы.
11. Таблица истинности формулы. Возможность представления любой булевой функции некоторой формулой. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Эквивалентные формулы, выполнимые формулы и тавтологии.
12. Исчисление высказываний (ИВ) (аксиомы, правила вывода, понятие выводимой формулы из данного множества формул).
13. Вывод формулы $A \to A$.
14. Лемма о дедукции для ИВ.
15. Выводы в ИВ.
16. Лемма о таблице истинности: $\neg_{\varepsilon_1} x_1, \neg_{\varepsilon_2} x_2, \ldots, \neg_{\varepsilon_n} x_n \models \neg_\varepsilon A$, где $\neg_1 A = A$, $\neg_0 A = \neg A$, а ε есть значение формулы A, если её переменные x_1, $x_2, \ldots, x_n$ принимают значения ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ соответственно.
17. Теорема о полноте ИВ.

3. Логика первого порядка.

18. Определение формулы данной сигнатуры.
19. Интерпретации данной сигнатуры.
20. Понятие истинности формулы в данной интерпретации.
21. Выразимые в данной интерпретации предикаты. Доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов.
22. Элиминация кванторов в интерпретации $\langle Z, S, = \rangle$ (или в интерпретации $\langle Z, 0, S, = \rangle$). Невыразимость отношения "быть меньше" в этой интерпретации.
24. Исчисление предикатов (ИП): аксиомы, правила вывода. Допустимость применения правила обобщения.
25. Теорема о корректности исчисления предикатов. Теорема Геделя о полноте (без доказательства).
26. Примеры выводов в исчислении предикатов: вывод формул $\exists y\ \forall x\ \varphi \to \exists x\ \forall y\ \varphi$, $\forall x\ A(x) \to \forall y\ A(y)$, $\exists x\ A(x) \to \exists y\ A(y)$ (где A — одноместный предикатный символ), $\neg\forall x\ \varphi \leftrightarrow \exists x\ \neg\varphi$, $\neg\exists x\ \varphi \leftrightarrow \forall x\ \neg\varphi$.
27. Теорема о том, что замена любой подформулы на доказуемо эквивалентную формулу даёт доказуемо эквивалентную формулу.
28. Аксиомы равенства. Теорема о корректности исчисления предикатов с равенством. Теорема Геделя о полноте для исчисления предикатов с равенством (без доказательства).
29. Выводимость из посылок для исчисления предикатов. Свойства этого понятия.
30. Понятие теории, модели теории, непротиворечивости и совместности теорий. Теорема Гёделя о полноте в сильной форме (без доказательства).