УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

доц. А. Ю. Горицкий

1 год, 3 курс, поток механиков

1. Задача Коши для квазилинейного уравнение в частных производных первого порядка. Классические и обобщенные решения. Условие Ранкина–Гюгонио. Условие допустимости разрыва типа условия возрастания энтропии. Решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва.

2. Линейное уравнение с частными производными произвольного порядка. Главный символ уравнения. Приведение линейного уравнения к каноническому виду в точке. Классификация линейных уравнений второго порядка.

3. Понятие характеристики для линейного уравнения с частными производными произвольного порядка. Постановка задачи Коши. Теорема Коши–Ковалевской (доказательство единственности).

4. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка: уравнение колебаний струны; уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач.

5. Задача Коши для уравнения струны, формула Даламбера. Гладкость решения в зависимости от гладкости начальных данных. Полуограниченная струна, условия согласования.

6. Ограниченная струна. Метод Фурье. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний закрепленной струны.

7. Задача Штурма–Лиувилля. Ортогональность собственных функций оператора Штурма–Лиувилля; вещественность, неположительность и однократность собственных значений.

8. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Характеристический конус. Теорема единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

9. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Распространение колебаний в $\mathbb{R}^3$. Передний и задний фронт волны.

10. Метод спуска. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Распространение волн в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$. Области зависимости решений от начальных данных.

11. Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача. Принцип максимума в цилиндре. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий.

12. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума в слое. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

13. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона в случае произвольной ограниченной непрерывной начальной функции. Гладкость решения.

14. Решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной методом Фурье. Обоснование метода Фурье для задачи с нулевыми граничными условиями. Гладкость решения.

15. Первая формула Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа, его существование. Вторая формула Грина. Представление функции в виде суммы трех потенциалов.

16. Гармонические функции, их свойства: бесконечная дифференцируемость, теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару. Принцип максимума для гармонических функций. Лемма о нормальной производной.

17. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле в ограниченной области, условие существования решения задачи Неймана.

18. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина.

19. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Дирихле в шаре в $\mathbb{R}^n$. Обоснование формулы Пуассона.

20. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Теорема Лиувилля.

21. Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана. Исследование единственности решений внешних краевых задач.

22. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространство $H_1(\Omega)$, его полнота.

23. Пространство $H_1^0(\Omega)$. Неравенство Фридрихса. Нормы и скалярное произведение в $H_1(\Omega)$ и $H_1^0(\Omega)$. Теорема о следах.

24. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнений Пуассона и Лапласа, доказательство единственности.

25. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа вариационным методом. Существование и единственность решения вариационной задачи.

26. Оператор усреднения и его свойства. Обобщенные гармонические функции, их регулярность.

27. Общее понятие корректной задачи математической физики. Примеры корректных и некорректных задач. Пример Адамара.