УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

проф. Т. А. Шапошникова

1 год, 3 курс

1. Понятие уравнения в частных производных. Задачи механики и физики, приводящие к уравнениям в частных производных. Линейное уравнение в частных производных второго порядка. Постановка обобщенной задачи Коши.

2. Понятие характеристики для уравнения в частных производных второго порядка. Примеры: а) характеристики для простейших уравнений; б) случай двух независимых переменных; в) док-во утв.: если решение линейного уравнения второго порядка имеет слабый разрыв вдоль кривой, разделяющей всю область на две части, то эта кривая — характеристика.

3. Задача Коши с данными на характеристике. Соотношения между данными Коши на характеристики.

4. Теорема Ковалевской. Пример Ковалевской. Теорема Хольмгрена единственности неаналитического решения.

5. Приведение уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду. Классификация уравнений.

6. Различные постановки задач для уравнений в частных производных. Понятие корректно поставленной задачи. Пример Адамара.

7. Волновое уравнение. Характеристический конус. Вывод интегрального представления. Формулы д'Аламбера, Пуассона и Кирхгофа.

8. Задача Коши для волнового уравнения. Классическое решение задачи Коши: определение, теорема единственности и существовании решения (исследование формулы Кирхгофа).

9. Пример, показывающий невозможность ослабления условий гладкости на данные задачи в теореме существования.

10. Энергетическое неравенство для решения волнового уравнения.

11. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространства $H_1(\Omega)$, $H_1^0(\Omega)$. Основные свойства пространств $H_1(\Omega)$, $H_1^0(\Omega)$. Следы функций из $H_1(\Omega)$ на гиперповерхностях.

12. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре. Теорема Реллиха.

13. Обобщенное решение задачи Коши для волнового уравнения. Теорема существования и единственности обобщенного решения.

14. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Обобщенное решение задачи Дирихле. Теорема существования и единственности обобщенного решения.

15. Обобщенные собственные функции и собственные значения задачи Дирихле в конечной области для оператора Лапласа. Спектр задачи Дирихле. Свойства собственных функций первой краевой задачи для оператора Лапласа.

16. Постановка смешанной задачи для волнового уравнения. Обобщенное решение первой начально-краевой задачи для волнового уравнения. Теорема единственности обобщенного решения.

17. Доказательство существования обобщенного решения первой начально-краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье.

18. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны. Обоснование существования классического решения (условия согласования).

19. Гармонические функции. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Представление решения уравнения Пуассона в виде суммы потенциалов.

20. Основные краевые задачи для оператора Лапласа. Классические решения (понятие). Лемма о нормальной производной.

21. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Свойства функции Грина.

22. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре (интеграл Пуассона). Неравенство Харнака. Теорема Лиувилля.

23. Теоремы о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций. Обращение теоремы о среднем.

24. Теорема об устранимой особенности. Оценки производных гармонической функции в ограниченной области. Аналитичность.

25. Объемный потенциал и его свойства.

26. Поверхности Ляпунова. Потенциал двойного слоя и его простейшие свойства (гармоничность вне поверхности; телесный угол, интеграл Гаусса. Теорема о значениях интеграла Гаусса.)

27. Теорема о прямом значении потенциала двойного слоя на замкнутой поверхности Ляпунова.

28. Теорема о предельных значениях потенциала двойного слоя (теорема о скачке).

29. Непрерывность во всем пространстве потенциала простого слоя.

30. Нормальная производная потенциала простого слоя. Прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя на замкнутой поверхности Ляпунова.

31. Теорема о предельных значениях нормальной производной потенциала простого слоя.

32. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа (внутренних и внешних) к интегральным уравнениям.

33. Интегральный оператор со слабой особенностью: его свойства (оценка нормы; вполне непрерывность в пространствах $L_2(\Omega)$, $C(\Omega)$). Теоремы Фредгольма.

34. Единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле (классические решения).

35. Оценка производных гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешней задачи Неймана.

36. Существование классического решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана. (Представление решений в виде соответствующих потенциалов.)

37. Существование классического решения внутренней задачи Неймана. Необходимое и достаточное условие разрешимости внутренней задачи Неймана.

38. Существование классического решения внешней задачи Дирихле.

39. Уравнение теплопроводности. Формулы Грина. Фундаментальное решение. Связь фундаментального решения оператора Лапласа и фундаментального решения оператора теплопроводности.

40. Принцип максимума для решений уравнения теплопроводности в ограниченной и неограниченной областях.

41. Строгий принцип максимума для решения уравнения теплопроводности.

42. Постановка основных начально-краевых задач для оператора теплопроводности. Априорные оценки решения уравнения теплопроводности. Единственность решения первой и второй начально-краевой задачи для оператора теплопроводности.

43. Обобщенное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Существование обобщенного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (методом Фурье).

44. Теоремы о стабилизации для решений уравнения теплопроводности (в ограниченной и неограниченной областях).

45. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Единственность решения задачи Коши для оператора теплопроводности в классе ограниченных функций.

46. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с ограниченной непрерывной начальной функцией.

47. Вариационный метод решения задачи Дирихле. Построение приближенных решений задачи Дирихле методом Ритца.