УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

доц. А. Ю. Горицкий

1/2 года, 3 курс, поток экономистов

1. Линейное уравнение с частными производными второго порядка. Приведение линейного уравнения к каноническому виду в точке. Классификация линейных уравнений второго порядка.

2. Понятие характеристики. Характеристики для уравнения струны, волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.

3. Задача Коши для уравнения струны, формула Даламбера. Ограниченная струна. Метод Фурье.

4. Задача Штурма–Лиувилля. Ортогональность собственных функций оператора Штурма–Лиувилля; вещественность, неположительность и однократность собственных значений.

5. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Характеристический конус. Теорема единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Распространение колебаний в $\mathbb{R}^3$. Передний и задний фронт волны.

7. Метод спуска. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Распространение волн в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$. Области зависимости решений от начальных данных.

8. Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача. Принцип максимума в цилиндре. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий.

9. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума в слое. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

10. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Обоснование формулы Пуассона в случае произвольной ограниченной непрерывной начальной функции. Гладкость решения.

11. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа, его существование. Представление функции в виде суммы трех потенциалов.

12. Гармонические функции, их свойства: бесконечная дифференцируемость, теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару. Принцип максимума для гармонических функций. Лемма о нормальной производной.

13. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле в ограниченной области, условие существования решения задачи Неймана.

14. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина.

15. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Дирихле в шаре в $\mathbb{R}^n$. Обоснование формулы Пуассона.

16. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Теорема Лиувилля.

17. Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана. Исследование единственности решений внешних краевых задач.

18. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространство $H_1(\Omega)$, его полнота.

19. Пространство $H_1^0(\Omega)$. Неравенство Фридрихса. Нормы и скалярное произведение в $H_1(\Omega)$ и $H_1^0(\Omega)$.

20. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Доказательство существования и единственности решения сведением к теореме Рисса.

21. Сведение задачи Дирихле к вариационной задаче. Сходимость минимизирующей последовательности. Существование и единственность решения вариационной задачи.

22. Общее понятие корректной задачи математической физики. Примеры корректных и некорректных задач. Пример Адамара.