ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

проф. В. В. Сенатов

1/2 года, 2 курс, отделение математики

Основное внимание в курсе уделено вопросам сходимости в пространствах случайных величин и их распределений.

1. Вероятностное пространство как математическая модель эксперимента со случайными исходами. Операции над реальными событиями. Частота события, ее свойства. Устойчивость частот реальных случайных событий. Операции над множествами. Алгебры и σ-алгебры множеств. Измеримые пространства. Меры, их свойства. Пространства с мерами. Вероятностные пространства. Свойства вероятности.

2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики.

3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость попарная и в совокупности. Построение вероятностных пространств для сложных экспериментов; прямое произведение вероятностных пространств.

4. Дискретные случайные величины. Распределение вероятностей случайной величины (вектора). Функция распределения. Примеры распределений (вырожденное, Бернулли, Пуассона). Совместное распределение. Маргинальные распределения. Независимость случайных величин (эквивалентные определения). Распределение суммы двух независимых целочисленных случайных величин. Биномиальное распределение.

5. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его вычисление через распределение вероятностей. Свойства математического ожидания. Дисперсия, ее свойства. Ковариация, коэффициент корреляции. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли.

6. Вероятностная модель эксперимента с произвольным множеством исходов. Аксиоматика Колмогорова. Аксиомы и основные свойства вероятности. Связь между счетной аддитивностью и непрерывностью вероятности. Минимальная σ-алгебра. Продолжение меры. Теорема Каратеодори (без доказательства). Борелевские множества в $\mathbb{R}^1$ и в $\mathbb{R}^n$.

7. Случайные величины. Замкнутость множества случайных величин относительно арифметических операций и предельного перехода. Функции от случайных величин. Распределение вероятностей, порожденное случайной величиной. Функция распределения. Взаимно однозначное соответствие между распределениями и функциями распределения. Абсолютно непрерывные распределения; плотности распределений. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, экспоненциальное, Коши, нормальное). Сингулярные и дискретные распределения. Пример сингулярного распределения (распределение Кантора). Теорема Лебега (без доказательства). Совместное и маргинальные распределения случайных величин. σ-алгебра, порожденная случайной величиной. Независимость случайных величин.

8. Интеграл Лебега; математическое ожидание, основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла, формула замены переменных под знаком интеграла. Вычисление математического ожидания функции от случайной величины по распределению вероятностей случайной величины. Интеграл Римана–Стилтьеса. Моменты старших порядков. Связь между существованием моментов и поведением “хвостов” функции распределения.

9. Сходимость по вероятности. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Сходимость почти наверное. Критерий сходимости почти наверное. Неравенство Колмогорова. Усиленный закон больших чисел. Связь между сходимостью по вероятности и сходимостью почти наверное.

10. Сходимость в основном и слабая сходимость. Теорема Хелли. Метризуемость слабой сходимости. Критерий относительной компактности для слабой сходимости. Эквивалентные определения слабой сходимости. Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их функций распределения. Связь между слабой и равномерной сходимостями функций распределения.

11. Суммы независимых случайных величин. Формула свертки. Поведение распределений ненормированных сумм случайных величин при росте числа слагаемых (независимые одина-

ково распределенные случайные величины с конечной дисперсией). Нормированные суммы. Формулировка центральной предельной теоремы. Теорема Муавра–Лапласа.

12. Характеристические функции. Примеры характеристических функций. Взаимная однозначность соответствия между распределениями и характеристическими функциями; формула обращения (для функций распределения и для плотностей, без доказательства). Взаимная непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин. Другие свойства характеристических функций.

13. Доказательство центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных величин (метод характеристических функций). Закон больших чисел в форме Хинчина.

14. Различия в законе больших чисел и в центральной предельной теореме для одинаково и различно распределенных слагаемых. Условие Ляпунова (без доказательства). Теорема Линдеберга–Феллера (без доказательства). Оценка Берри–Эссена (без доказательства).

15. Теорема Пуассона.