ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

доц. А. В. Прохоров

1/2 года, 2 курс

1. Предмет теории вероятностей и основные этапы развития вероятностных понятий. Различные подходы к определению вероятности. Вероятностные модели экспериментов.

2. Классическое определение вероятности. Простейшие вероятностные модели: урновые модели случайного выбора, модель размещения частиц по ячейкам, модель симметричного случайного блуждания.

3. Дискретное вероятностное пространство. Свойства вероятностей. Формулы сложения вероятностей. Примеры дискретных вероятностных распределений (распределение Бернулли, биномиальное, гипергеометрическое, геометрическое распределения).

4. Условная вероятность и ее свойства. Формулы умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса.

5. Независимость случайных событий и классов событий. Независимость σ-алгебр, порожденных независимыми классами событий.

6. Прямое произведение вероятностных пространств. Схема Бернулли как вероятностная модель.

7. Закон больших чисел для схемы Бернулли. Следствие — доказательство теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами.

8. Биномиальное распределение и теорема о его приближении распределением Пуассона.

9. Распределение Пуассона, его определение как решения системы дифференциальных уравнений.

10. Теорема Муавра–Лапласа о приближении биномиального распределения.

11. Общая вероятностная модель. Вероятностное пространство в аксиоматике Колмогорова. Алгебры и σ-алгебры событий. Свойства -аддитивности и непрерывности вероятности.

12. Леммы Бореля–Кантелли. Закон "нуля или единицы"Бореля. Усиленный закон больших чисел для схемы Бернулли.

13. Функции распределения и их свойства. Задание вероятностной меры на $\mathbb{R}^1$ с помощью функции распределения.

14. Типы функций распределения на прямой. Теорема о разложении произвольной функции распределения. Примеры распределений с плотностью — равномерное, показательное, нормальное.

15. Случайные величины как измеримые функции. Распределение вероятностей случайных величин и функций от них. Функция распределения случайной величины.

16. Математическое ожидание случайной величины, определение для дискретного и абсолютно непрерывного случая. Общее определение математического ожидания через интеграл Лебега. Свойства математического ожидания.

17. Моменты случайных величин любого порядка. Неравенства для моментов (неравенства Коши–Буняковского, Иенсена, Ляпунова).

18. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Неравенство Чебышева.

19. Задание вероятностной меры в $\mathbb{R}^n$ с помощью многомерной функции распределения. Согласованные распределения в $\mathbb{R}^n$. Теорема Колмогорова о задании вероятностной меры в $\mathbb{R}^\infty$.

20. Совместное распределение вероятностей нескольких случайных величин и его числовые характеристики. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.

21. Независимость случайных величин. Критерий независимости в терминах функций распределения. Свойства математических ожиданий и дисперсий независимых случайных величин.

22. Примеры совместных распределений. Полиномиальное распределение. Многомерное нормальное распределение, эквивалентность независимости и некоррелированности компонент.

23. Марковская вероятностная модель. Определение однородной цепи Маркова. Уравнение Колмогорова–Чепмена. Эргодическая теорема и закон больших чисел для цепи Маркова с двумя значениями. Стационарное распределение.

24. Сходимость последовательностей случайных величин. Соотношение различных типов сходимости: по вероятности, с вероятностью 1, в среднем, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1.

25. Закон “нуля или единицы” Колмогорова для последовательности независимых случайных величин.

26. Распределение суммы независимых случайных величин. Формула свертки.

27. Закон больших чисел (теоремы Чебышева и Бернштейна).

28. Усиленный закон больших чисел (теоремы Кантелли и Колмогорова). Неравенство Колмогорова.

29. Комплекснозначные случайные величины и их математические ожидания. Характеристические функции и их свойства.

30. Теоремы непрерывности и единственности для характеристических функций. Формулы обращения.

31. Метод характеристических функций.

32. Оценка близости биномиального и пуассоновского распределений с помощью характеристических функций.

33. Закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин (теорема Хинчина).

34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.