ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

проф. А. В. Булинский

1/2 года, 2 курс, отделение математики

1. Предмет и методы теории вероятностей, ее основные этапы развития. Несколько современных задач.

2. Модели случайных экспериментов. Свойство устойчивости частот. Примеры. События и действия над ними. Полукольцо, алгебра и σ-алгебра подмножеств пространства элементарных исходов. Наименьшая σ-алгебра $\sigma\{M\}$, порожденная системой множеств M. Разбиения. Борелевская σ-алгебра.

3. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Дискретное вероятностное пространство (с конечным или счетным числом исходов). Схема Бернулли. Классическое определение вероятности. Понятие об общей структуре вероятностного пространства (атомы, непрерывная часть).

4. Свойства вероятности. Вероятность объединения n (пересекающихся) событий. Доказательство того, что счетная аддитивность вероятности равносильна ее конечной аддитивности вместе со свойством непрерывности в "нуле" (пустом множестве). Непрерывность вероятности "сверху" и "снизу". Идея продолжения меры (формулировка теоремы Каратеодори, пополнение вероятностного пространства).

5. Геометрические вероятности. Задача о встрече в заданном промежутке времени. Парадокс Бертрана.

6. Условная вероятность (наводящие соображения в случае классического определения вероятности). Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.

7. Независимость событий (попарная и в совокупности). Пример Бернштейна. Доказательство того, что независимость алгебр влечет независимость порожденных ими σ-алгебр. Произведение конечного числа вероятностных пространств.

8. Леммы Бореля–Кантелли.

9. Случайные элементы (случайные величины и случайные векторы). Доказательство того, что $F|B$-измеримость случайного элемента X (т.е. измеримого отображения вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ в измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$) вытекает из того, что $X^{-1}(M) \subset F$, когда $\sigma(M) = B$. Распределение случайного элемента. Построение случайного элемента с заданным распределением.

10. Функции распределения действительной случайной величины, ее свойства. Построение меры по функции, обладающей свойствами функции распределения.

11. Борелевская σ-алгебра произведения сепарабельных метрических пространств. Случайный вектор в $\mathbb{R}^n$ как вектор из n действительных случайных величин. Функция распределения случайного вектора.

12. Функции от случайных элементов (суперпозиции измеримых отображений). Борелевские функции (в частности, непрерывные отображения метрических пространств). Измеримость $X+Y$ и $X-Y$, XY и X/Y (при $Y \neq 0$) для действительных случайных величин X и Y. Понятие расширенной случайной величины со значениями в $[-\infty, \infty]$. Измеримость $\inf\limits_n X_n$, $\sup\limits_n X_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ для последовательности действительных случайных величин $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Сходимость почти наверное. Доказательство того, что предел п.н. последовательности случайных элементов является случайным элементом (вероятностное пространство пополнено).

13. Дискретное, непрерывное и сингулярное распределения на прямой. Формулировка теоремы Лебега о том, что любое распределение на прямой является смесью упомянутых выше. Примеры (биноминальное, пуассоновское, геометрическое, равномерное, экспоненциальное, нормальное распределения, канторовская лестница).

14. Конструкция математического ожидания (интеграл Лебега по вероятностной мере, замечание о σ-конечной мере). Определение для "простых" случайных величин, для неотрицательных, в общем случае. Доказательство корректности определения на каждом из этих трех шагов.

15. Свойства математического ожидания. Пространства $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, $p \geqslant 1$. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца, Маркова, Чебышева.

16. Теорема о монотонной сходимости. Почленное интегрирование рядов из неотрицательных случайных величин. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

17. Формула замены переменных в интеграле Лебега (при интегрировании измеримых функций от случайных элементов): переход от интегрирования по вероятностной мере P к интегрированию по распределению P_X случайного элемента X. Абсолютная непрерывность мер. Плотность. Формулировка теоремы Радона–Никодима. Замена меры в интеграле при наличии плотности.

18. Независимость выбора случайных величин попарная и в совокупности. Семейства независимых случайных величин. Доказательство того, что борелевские функции от непересекающихся наборов независимых случайных величин независимы. Математическое ожидание от произведения независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания.

19. Моменты, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии. Свойства дисперсии. Дисперсия суммы случайных величин из $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Сходимость в пространстве L^p.

20. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел (теорема Чебышева). Следствие об устойчивости частот событий.

21. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами Бернштейна функции, непрерывной на отрезке.

22. Усиленный закон больших чисел для одинаково распределенных попарно независимых случайных величин, имеющих математическое ожидание (теорема Колмогорова–Этемади).

23. Доказательство того, что если $S_n/n \to a$ п.н. при $n \to \infty$, где $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ и X_1, X_2, $\ldots$ — одинаково распределенные независимые или попарно независимые величины, то существует $\mathsf{E}X_1$ и $a = \mathsf{E}X_1$.

24. Метод Монте-Карло. Построение действительной случайной величины, имеющей заданное распределение, с помощью случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$. Формулировка усиленного закона больших чисел для независимых, вообще говоря, разно распределенных слагаемых (теорема Колмогорова). Формулировка закона повторного логарифма (теорема Хартмана–Винтнера).

25. Расстояние по вариации между вероятностными мерами. Метод перехода к новому вероятностному пространству. Вариант теоремы Пуассона о приближении распределения суммы n независимых, вообще говоря, разно распределенных бернуллиевских величин пуассоновским распределением с оценкой точности аппроксимации по вариации.

26. Пример применения теорем Пуассона (с использованием таблиц пуассоновского распределения). Задача о числе частиц газа в заданной области пространства.

27. Формулировка теоремы Фубини. Формула свертки распределений.

28. Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Критерий слабой сходимости.

29. Соотношения между различными видами сходимости случайных величин. Метрика Ки Фан, метрика Леви–Прохорова. Доказательство того, что в пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$ слабая сходимость мер равносильна сходимости их функций распределения в основном (в точках непрерывности предельной функции).

30. Лемма Слуцкого: если для случайных векторов X, X_n, Y_n $(n \in \mathbb{N})$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$ имеем $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$, $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, то $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X + Y$ при $n \to \infty$.

31. Характеристические функции мер в $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$ и случайных векторов. Нахождение характеристических функций пуассоновской и нормальной случайных величин.

32. Свойства характеристических функций. Формулировка теоремы Бохнера–Хинчина.

33. Доказательство взаимно однозначного соответствия между распределениями и характеристическими функциями (с помощью теоремы Стоуна–Вейерштрасса).

34. Доказательство формулы обращения (выражение функции распределения через характеристическую функцию). Критерий независимости случайных величин в терминах характеристических функций.

35. Слабая относительная компактность обобщенных функций распределения (теорема Хелли).

36. Плотность семейства мер. Доказательство теоремы Прохорова для мер в пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$.

37. Лемма об оценке хвостов распределения в терминах характеристической функции.

38. Теорема непрерывности для характеристических функций (теорема Леви, описывающая сходимость по распределению случайных векторов в терминах характеристических функций).

39. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных величин, имеющих конечную дисперсию (в частности, интегральная теорема Муавра–Лапласа). Равномерная сходимость на всей оси функций распределения нормированных сумм к функции распределения стандартного нормального закона. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме (формулировка теоремы Берри–Эссеена).

40. Многомерное нормальное распределение. Критерий независимости компонент гауссовского вектора. Многомерный вариант центральной предельной теоремы.

41. Интегрирование по частям в интеграле Лебега–Стилтьеса. Следствия.

42. Неклассические (неулучшаемые) условия справедливости центральной предельной теоремы для схемы серий независимых слагаемых с конечными дисперсиями. Формулировка теоремы Линдеберга–Феллера.