ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

проф. Л. Г. Афанасьева

1/2 года, 2 курс, отделение математики

Вводная часть.

1. Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

2. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Вероятность суммы событий.

3. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

Математические основания теории вероятностей.

4. Вероятностная модель эксперимента с произвольным множеством исходов. Операции над событиями. Алгебры и σ-алгебры.

5. σ-алгебра борелевских множеств $\mathbb{R}^n$. Измеримые пространства.

6. Вероятность (аксиомы и основные свойства). Эквивалентность аксиомы счетной аддитивности и непрерывности.

7. Функция распределения меры на σ-алгебре борелевских множеств $\mathbb{R}^n$ ($\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$). Ее свойства.

8. Взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ и их функциями распределения.

9. Дискретные и непрерывные распределения на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Примеры распределений: Бернулли, Пуассона, равномерное, показательное, одномерно нормальное, Коши.

10. Случайные величины и векторы. Понятие о случайном элементе. σ-алгебра, порожденная случайной величиной (вектором). Распределение и функция распределения случайной величины (вектора). Непрерывные и дискретные случайные величины (векторы).

11. Интеграл Лебега. Определение и основные свойства (без доказательств).

12. Математическое ожидание. Основные свойства. Вычисление м.о. функции от случайных величин.

Независимость.

13. Независимость событий, классов событий, σ-алгебр, случайных величин (векторов).

14. Произведение вероятностных пространств. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.

15. Функции от случайных величин (векторов). Распределение суммы двух случайных величин, имеющих совместную плотность. Распределение суммы независимых случайных величин.

16. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин.

17. Моменты высших порядков. Дисперсия. Ковариация. Ковариационная матрица случайного вектора.

18. Многомерное нормальное распределение. Ковариационная матрица. Преобразование Фурье от плотности.

Предельные теоремы.

19. Разные виды сходимости последовательностей случайных величин. Сходимость по вероятности, почти наверное, в среднем порядка p. Критерий сходимости с вероятностью единица.

20. Слабая сходимость вероятностных мер и сходимость в основном. Их эквивалентность.

21. Соотношения между различными видами сходимости.

22. Теорема Пуассона. Теорема Бернулли.

23. Формулировка центральной предельной теоремы (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных случайных векторов. Как следствия одномерный случай, интегральная теорема Муавра–Лапласа и ЦПТ для полиномиальной схемы.

24. Характеристическая функция.

25. Характеристическая функция нормального распределения (одномерная и многомерная).

26. Формула обращения для характеристических функций. Теорема единственности.

27. Прямая и обратная предельные теоремы.

28. Доказательство ЦПТ для независимых случайных векторов.

29. Неравенства Чебышева и Колмогорова.

30. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теоремы Хинчина и Маркова.

31. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова для последовательности независимых случайных величин с конечными вторыми моментами.

32. Определение цепи Маркова и основные свойства. Вероятности $\mathsf{P}_{ij}(n)$ перехода за n шагов.

33. Эргодическая теорема для цепей Маркова с конечным множеством состояний.