

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ*проф. А. В. Булинский**1/2 года, 3 курс, отделение математики*

1. Случайные элементы и их распределения. Случайный процесс как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение.
2. Построение последовательности независимых действительных случайных величин, имеющих заданные функции распределения.
3. Примеры случайных процессов (случайные блуждания, процесс восстановления, модель Крамера–Лундберга, эмпирические меры, пуассоновская случайная мера).
4. Конечномерные распределения процесса. Формулировка теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (доказательство необходимости условий). Условия согласованности мер на пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций.
5. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений. Пуассоновский и винеровский процессы.
6. Гауссовские процессы. Построение действительного гауссовского процесса, имеющего заданные функцию среднего и ковариационную функцию.
7. Построение броуновского движения по функциям Шаудера и последовательности независимых гауссовских величин: а) две леммы; б) построение на $[0, 1]$; в) построение на $[0, \infty]$.
8. Недифференцируемость (с вероятностью 1) траекторий броуновского движения в каждой точке $t \geq 0$.
9. Фильтрация. Марковские моменты, момент остановки. Примеры.
10. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения.
11. Принцип отражения. Распределение $\sup_{t \in [0, T]} w(t)$. Формулировка закона повторного логарифма.
12. Слабая сходимость вероятностных мер. Теорема А. Д. Александрова.
13. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений. Формулировка теоремы Прохорова о плотности семейства мер. Принцип инвариантности (формулировка теорем Донскера, Прохорова, Боровкова, Скорохода). Формулировка теоремы Штрассена.
14. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба.
15. Дискретный вариант формулы Танака. Доказательство соотношения $EL_n(0) \sim \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{1/2}, n \rightarrow \infty$.
16. Теорема Дуба о свободном выборе.
17. Неравенство Крамера–Лундберга.
18. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Примеры.
19. Доказательство того, что действительный процесс с независимыми приращениями является марковским.
20. Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Пуассоновский процесс как цепь Маркова.
21. Марковская переходная функция. Однородные марковские процессы.
22. Эргодическая теорема для цепей Маркова с непрерывным временем.
23. Стационарное распределение. Формулы Эрланга (описание модели).
24. Дифференциальные уравнения Колмогорова (прямые и обратные).
25. Интеграл по ортогональной случайной мере (случай конечной и σ -конечной структурной меры).
26. Теорема Карунена.
27. Теорема Герглотца. Формулировка теоремы Бохнера–Хинчина.
28. Стационарные в широком смысле процессы, их спектральное представление. Эргодичность в $L^2(\Omega)$.
29. Спектральная плотность. Процесс скользящего среднего как процесс, обладающий спектральной плотностью.
30. Регулярные и сингулярные процессы. Формулировка теоремы Вольда и теоремы Колмогорова (критерий регулярности в терминах спектральной плотности).

31. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека.
32. Интеграл Ито и его свойства.
33. Понятие о стохастических дифференциальных уравнениях и сильных решениях.
33. Формула Ито (без доказательства) и пример ее использования.