ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

проф. Е. В. Булинская

1/2 года, 3 курс, отделение математики

1. Понятие случайного элемента со значениями в измеримом пространстве. Распределение случайного элемента.

2. σ-алгебра $\mathbf{B}^T$. Два определения случайного процесса, их эквивалентность.

3. Конечномерные распределения, условия симметрии и согласованности. Траектории (выборочные функции) случайного процесса. Семейство конечномерных распределений однозначно определяет меру любого борелевского множества выборочного пространства $\mathbb{R}^T$.

4. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданным семейством конечномерных распределений.

5. Гауссовские случайные процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданным семейством конечномерных распределений.

6. Процессы с независимыми приращениями. Эквивалентность двух определений винеровского процесса. Пуассоновский процесс.

7. Стационарность в узком и широком смысле, связь между ними.

8. Эквивалентность случайных процессов.

9. Различные понятия непрерывности случайных процессов, связь между ними.

10. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.

11. Теорема Колмогорова (достаточное условие существования непрерывной модификации).

12. Условие для гауссовского процесса.

13. Конструкция винеровского процесса в виде суммы ряда из гауссовских случайных величин.

14. Понятие сепарабельности. Теорема о существовании эквивалентного процесса с неубывающими траекториями.

15. Измеримость процесса. Теорема об измеримости непрерывного с вероятностью 1 сепарабельного процесса. Измеримость винеровского процесса. Интегрируемость траекторий.

16. Поток σ-алгебр. Эквивалентные определения марковского процесса. Семейства линейных операторов, связанных с переходной функцией.

17. Феллеровские марковские семейства. Теорема существования.

18. Диффузионные процессы. Обратное уравнение Колмогорова.

19. Диффузионные процессы. Прямое уравнение Колмогорова.

20. Необходимое и достаточное условий того, что функция $R(t, s)$ является корреляционной. Необходимые и достаточные условия сходимости в среднем квадратичном.

21. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости процессов в среднем квадратичном.

22. Теорема о дифференцируемости процесса с корреляционной функцией, имеющей непрерывную вторую смешанную производную.

23. Случайные меры. Связь ортогональных случайных мер и процессов с ортогональными приращениями, непрерывными в среднем квадратичном. Структурная мера.

24. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере и его свойства.

25. Спектральное разложение стационарного в широком смысле процесса (с использованием теории унитарных операторов).

26. Теорема Бохнера–Хинчина.

27. Теорема о спектральном разложении стационарного в широком смысле процесса.

28. Линейные преобразования стационарного в широком смысле процесса. Импульсная переходная функция и частотная характеристика. Допустимый фильтр, физически осуществимый фильтр.

29. Наилучший и наилучший линейный прогноз в среднем квадратичном; их совпадение в гауссовском случае.

30. Понятие сингулярности и регулярности стационарной в широком смысле последовательности. Теорема о разложении процесса на регулярную и сингулярную составляющие.

31. Разложение Вольда. Наилучший линейный прогноз на q шагов вперед.

32. Марковское и строго марковское свойство винеровского процесса.

33. Принцип отражения. Закон повторного логарифма для винеровского процесса. Недифференцируемость траекторий.

34. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Преобразования, сохраняющие субмартингальность.

35. Стохастический интеграл Ито и его свойства.

36. Формула замены переменных Ито.

37. Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности сильного решения.

38. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

39. Решение стохастического дифференциального уравнения — диффузионный процесс.