ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

проф. Ю.Ф. Голубев

1 год, 2 курс, отделение механики

Введение.

1. Предмет теоретической механики. Основные понятия (пространство, время, система отсчета) и модели теоретической механики (материальная точка, абсолютно твердое тело, материальная система).

2. Основы динамики. Принцип детерминированности. Принцип относительности.

I. Кинематика.

1. Закон движения, траектория, скорость и ускорение точки. Скорость и ускорение точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Законы движения точки с постоянным вектором скорости и с постоянным вектором ускорения. Проекции ускорения на оси естественного трехгранника.

2. Способы задания движения твердого тела. Группа *SO(3)* . Теорема Эйлера о конечном повороте. Угловые координаты (углы Эйлера, углы Брайнта), параметры Эйлера, параметры Кели-Клейна (группа *SU(2)*), кватернионы. Изоморфизм характеристик углового движения твердого тела. Угловая скорость твердого тела как псевдовектор. Формулы Эйлера для поля скоростей и Ривальса для поля ускорений. Вращательное и осестремительное ускорения.

3. Сложное движение точки. Теорема сложения скоростей. Связь абсолютной и относительной производных вектора. Теорема сложения ускорений. Влияние ускорения Кориолиса на относительное движение. Ускорение точки в системе координат, связанной с вращающейся Землей.

4. Поле скоростей свободного твердого тела. Поступательное движение тела и вращение тела вокруг неподвижной оси. Мгновенная ось вращения. Мгновенная винтовая ось. Аксоиды. Аксоиды для твердого тела с неподвижной точкой. Мгновенный центр ускорений. Плоскопараллельное движение тела. Мгновенный центр скоростей и центроиды. Поле ускорений для плоскопараллельного движения. Ускорение точки твердого тела, совпадающей с мгновенным центром скоростей.

5. Сложное движение твердого тела. Угловая скорость как скользящий вектор. Пара скользящих векторов. Приведение системы скользящих векторов к простейшему виду. Инварианты системы скользящих векторов. Центр системы параллельных скользящих векторов. Теорема сложения произвольной системы угловых скоростей. Кинематические уравнения (уравнения Пуассона, уравнения Эйлера, кинематические уравнения для кватернионов).

II. Динамика точки.

1. Уравнения движения материальной точки в декартовой инерциальной системе отсчета. Прямая, обратная и смешанная задачи динамики. Уравнения движения в проекциях на оси локального репера криволинейной системы координат и на естественные оси. Кинетическая энергия. Понятие первого интеграла системы уравнений движения. Критерий первого интеграла.

2. Работа силы на перемещении. Потенциальные силы. Силовая функция и потенциальная энергия. Поверхности уровня силовой функции и силовые линии. Силовые функции ньютонианского тяготения, электростатического взаимодействия, упругой силы. Аддитивность потенциала. Силы трения. Отсутствие силовой функции для сил трения.

3. Теоремы об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии точки в инерциальной системе отсчета. Законы сохранения импульса, кинетического момента и полной механической энергии. Геометрический смысл кинетического момента. Векторный интеграл кинетического момента как критерий центральной силы.

4. Линейный осциллятор. Влияние сил сухого и вязкого трения и внешнего возбуждения. Фазовые портреты. Частотный и параметрический резонансы.

5. Движение точки в однородном поле силы тяжести. Параболоид безопасности. Влияние линейного вязкого сопротивления.

6. Движение точки под действием центральной силы. Свойства движения. Интеграл площадей. Формулы Бине. Законы Кеплера. Вывод закона всемирного тяготения из законов Кеплера. Задача двух тел.

7. Движение точки в центральном гравитационном поле. Области возможности движения. Интеграл Лапласа. Определение орбиты. I и II космические скорости. Уравнение Кеплера и определение закона движения по эллиптической орбите. Задача о попадании в центральном гравитационном поле. Эллипсоид безопасности.

8. Движение точки, стесненное дифференциальными связями. Заданные силы и реакции связей. Задача о нахождении реакций. Принцип освобождения от связей. Нормальная реакция, касательная реакция. Реакция идеальной связи. Реакция при движении точки по идеальной поверхности и по идеальной кривой. Теорема об изменении кинетической энергии при наличии идеальных связей. Интеграл энергии. Определение реакции как функции от положения точки на идеальной кривой в консервативном случае.

9. Области возможности движения точки в консервативном случае. Период малых колебаний в потенциальной яме. Математический маятник. Циклоидальный маятник. Сферический маятник.

10. Движение точки по отношению к неинерциальной системе отсчета. Переносная и кориолисова силы инерции. Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении точки. Обобщенный интеграл энергии.

11. Движение во вращающейся системе отсчета. Математический маятник во вращающейся системе отсчета, бифуркация относительных равновесий, перестройка фазового портрета. Равновесие материальной точки на Земле. Падение материальной точки на Землю с учетом вращения Земли. Маятник Фуко.

12. Неудерживающие связи. Условие схода с неудерживающей связи. Удар точки о связь.

III. Динамика системы материальных точек.

1. Локальные вариационные принципы механики. Классификация связей. Реакции связей и виртуальные перемещения для систем с нелинейными по скоростям связями. Идеальные связи. Критерии интегрируемости системы дифференциальных связей. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа для систем с идеальными связями. Принцип Гаусса. Уравнения Аппеля. Принцип виртуальных перемещений. Условия равновесия для систем с потенциальными силами. Принцип Торричелли. Основные теоремы статики. Условия равновесия голономных систем. Условия равновесия твердого тела. Геометрическая статика. Принцип отвердевания.

2. Основные теоремы динамики системы. Теоремы об изменении количества движения. Их интерпретация с использованием понятия центра масс. Интегралы количества движения. Теоремы об изменении кинетического момента. Интегралы кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии. Интеграл энергии. Теоремы Кенига о вычислении кинетического момента, кинетической энергии и энергии ускорений системы материальных точек. Постановка задачи N тел. Ограниченная задача трех тел. Точки либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента систем переменного состава. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

3. Уравнения Лагранжа второго рода. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа в координатах. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода из принципа Д'Аламбера-Лагранжа. Разрешимость уравнений Лагранжа 2-го рода относительно вторых производных от обобщенных координат. Уравнения Лагранжа 2-го рода в случае потенциальных сил, функция Лагранжа. Обобщенный интеграл энергии. Гироскопические и диссипативные силы. Циклические координаты, циклические интегралы. Интегралы количества движения и кинетического момента как циклические интегралы. Метод Рауса игнорирования циклических координат, уравнения Рауса. Теорема Нетер. Уравнения Лагранжа 2-го рода в относительном движении. Обобщенный потенциал. Структура обобщенно потенциальных сил. Обобщенный потенциал сил инерции.

4. Динамика твердого тела. Осевые и центробежные моменты инерции твердого тела. Тензор инерции. Эллипсоид инерции. Главные оси и моменты инерции. Количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела. Уравнения движения твердого тела. Понятие об эквивалентности систем сил, действующих на твердое тело. Приведение системы сил к точке. Приведение сил тяжести к центру масс тела. Сила притяжения материальной точки однородным шаром. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение реакций. Физический маятник. Приведенная длина и центр качания. Теорема Гюйгенса. Твердое тело с неподвижной точкой. Уравнения Эйлера-Пуассона и их первые интегралы. Волчок Эйлера. Геометрическая интерпретация Пуансо. Регулярная прецессия. Случай Лагранжа движения твердого тела около неподвижной точки (качественное исследование движения). Регулярная прецессия, спящий волчок, псевдорегулярная прецессия в случае Лагранжа. Случай Ковалевской движения твердого тела около неподвижной точки. Правило Жуковского о движении оси гироскопа. Движение твердого тела по поверхности. Модели гладкой и абсолютно шероховатой поверхностей. Волчок Ланранжа на гладкой плоскости. Движение однородного шара по абсолютно шероховатой плоскости. Модель сухого трения скольжения. Движение однородного шара по плоскости с сухим трением.

5. Движение системы в окрестности положения равновесия. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия. Линеаризация консервативной системы в окрестности положения равновесия. Приведение позиционной линейной лагранжевой системы уравнений движения к нормальной форме, вид общего решения. Экстремальные свойства частот. Изменение частот при наложении дополнительных связей.

IV. Аналитическая динамика.

1. Необходимые и достаточные условия экстремальности дифференцируемых функционалов. Необходимые условия экстремальности для задач с изопериметрическими ограничениями и для задач управления. Принцип Гамильтона стационарного действия. Принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби. Траектории склерономной консервативной механической системы как геодезические.

2. Система уравнений Гамильтона. Преобразование Лежандра и его свойства. Неравенства Юнга. Функция Гамильтона. Простейшие случаи интегрируемости гамильтоновых систем. Скобка Пуассона двух функций и ее свойства. Теорема Якоби-Пуассона о первых интегралах. Функция действия по Гамильтону.

3. Уравнение Гамильтона-Якоби. Понятие о полном интеграле уравнения Гамильтона-Якоби. Метод Якоби интегрирования канонических уравнений. Метод Имшенецкого. Простейшие случаи разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Система Лиувилля.

4. Теорема Штеккеля. Критерии интегрируемости уравнений движения в декартовых, полярных, сферических и цилиндрических координатах по методу разделения переменных.

5. Интегральные инварианты. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре и его геометрический смысл. Интегральные инварианты как критерий канонических уравнений Гамильтона. Уравнения Уиттекера. Обобщенный интеграл энергии как циклический интеграл.

6. Сохранение фазового объема для систем с позиционными и гироскопическими силами. Теорема Пуанкаре о возвращении. Множители Якоби. Теорема о последнем множителе. Теорема о поиске траекторий автономных систем с помощью последнего множителя.

7. Канонические преобразования. Теорема о сохранении канонических уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях. Изменение функции Гамильтона при каноническом преобразовании. Производящая функция и ее различные формы. Групповые свойства канонических преобразований. Зависимость канонических переменных от параметра в каноническом преобразовании. Переменные действие-угол. Уравнение в частных производных для производящих функций.

8. Применение канонических преобразований в теории возмущений. Приведение систем с малым параметром к стандартным формам. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Уравнения в вариациях.