ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

проф. М. Э. Эглит

1/2 года, 2 курс, отделение механики

Введение.

Предмет механики сплошной среды. Основные проблемы, область приложений, перспективные направления. Понятие сплошной среды. Процессы, в которых это понятие можно использовать для моделирования поведения реальных тел.

1. Основные понятия, используемые для описания движения и деформации сплошной среды.

1.1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошных сред.

- Лагранжево описание движения. Лагранжевы (материальные) координаты. Закон движения точек сплошной среды. Вычисление компонент вектора скорости по закону движения. Вычисление ускорения по скорости при лагранжевом описании.
- Эйлерово описание движения. Пространственные координаты. Вычисление поля ускорений по полю скоростей при эйлеровом описании. Индивидуальная (материальная, полная) и локальная производные по времени.
- Переход от лагранжева описания к эйлерову и обратный переход.

1.2. Тензоры и тензорные поля в евклидовом пространстве.

- Криволинейные системы координат. Ковариантные и контравариантные векторы базиса. Определение тензора, метрический тензор. Ковариантные, контравариантные и физические компоненты. Операции над тензорами. Инварианты тензоров.
- Тензорные поля. Ковариантное дифференцирование. Дивергенция и ротор век-тора, градиент скалярной функции.
- Тензоры второго ранга. Разложение на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Тензорная поверхность, главные оси, главные компоненты, инварианты симметричного тензора второго ранга. Шаровой тензор и девиатор. Представление антисимметричного тензора второго ранга в трехмерном пространстве аксиальным вектором. Тензор Леви–Чивита.
- Тензорные функции. Тензор второго ранга как функция одного или нескольких тензоров второго ранга. Тождество Гамильтона–Кэли. Формула Лагранжа–Сильвестра.
- Среды, обладающие симметрией. Изотропные, трансверсально-изотропные, ортотропные среды.

1.3. Деформация.

- Тензоры конечных и бесконечно малых деформаций. Механический смысл компонент. Главные оси и главные компоненты тензоров деформации. Выражение для относительного изменения объема через инварианты тензоров деформации — при конечных и малых деформациях. Механический смысл первого инварианта тензора деформации в случае малых деформаций.
- Выражение компонент тензоров деформаций через компоненты вектора перемещения. Линейные формулы в случае малых деформаций и малых относительных поворотов. Выражение для относительного изменения объема через вектор перемещения в случае малых деформаций и малых поворотов.

- Уравнения совместности для компонент тензоров деформаций. Уравнения совместности Сен-Венана в случае малых деформаций.
- Тензор скоростей деформаций. Выражение его компонент через производные от компонент скорости. Кинематический смысл компонент в декартовой системе координат. Механический смысл дивергенции вектора скорости. Условие несжимаемости среды.
- Формула Коши–Гельмгольца для распределения скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды.
- Вектор вихря. Определение. Кинематический смысл вектора вихря. Циркуляция скорости. Формула Стокса.
- Потенциал скорости. Эквивалентность понятий потенциального и безвихревого движения.

2. Универсальные законы сохранения и уравнения механики сплошной среды.

2.1. Некоторые операции над интегралами.

- Формула Гаусса–Остроградского. Кинематический смысл. Понятие потока вектора через поверхность. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объему.

2.2. Закон сохранения массы.

- Формулировка закона сохранения массы для конечного индивидуального объема сплошной среды. Уравнение неразрывности при Эйлеровом и при Лагранжевом описании среды. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды.

2.3. Закон сохранения количества движения.

- Силы, действующие на сплошную среду: массовые и поверхностные. Вектор напряжений. Закон сохранения количества движения для конечного индивидуального объема сплошной среды.
- Формула Коши, связывающая вектор напряжений на любой площадке с векторами напряжений на трех фиксированных взаимно перпендикулярных площадках. Тензор напряжений. Физический смысл компонент в декартовой системе координат.
- Дифференциальные уравнения движения сплошной среды.

2.4. Закон сохранения момента количества движения.

- Формулировка закона сохранения момента количества движения для конечного объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение момента количества движения.
- Условия, при которых симметрия тензора напряжений является следствием закона сохранения момента количества движения.

3. Простейшие модели сплошных сред.

- Жидкости и газы. Тензор напряжений в покоящейся жидкости. Давление.
- Идеальная жидкость. Уравнения Эйлера. Полные системы механических уравнений для несжимаемой жидкости и для баротропных движений сжимаемой жидкости. Условие непроницаемости на поверхности твердых тел.

- Вязкая жидкость. Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость. Связь между компонентами тензоров вязких напряжений и скоростей деформаций в изотропной линейно-вязкой жидкости (закон Навье–Стокса). Первый и второй коэффициенты вязкости (коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости). Кинематический коэффициент вязкости. Уравнения Навье–Стокса. Граничное условие прилипания на поверхности твердых тел. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости.

- Упругая среда. Линейно-упругая среда. Закон Гука для изотропной линейно-упругой среды при изотермическом деформировании. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль объемного сжатия. Уравнения Навье–Ламе. Типичные граничные условия.