МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. А.М. Седлецкий

2 курс, 3 семестр.

Числовые и функциональные ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ряды Фурье.

1. Числовой ряд. Сходимость и сумма. Пример: $\sum q^n$. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Простейшие свойства рядов. Теоремы сравнения для знакоположительных рядов.

2. Эквивалентное определение $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$. Признаки Коши и Далабера. Интегральный признак; оценка остатка ряда.

3. Признак Раабе. Знакоположительные ряды с монотонными членами: необходимое условие сходимости, необходимое и достаточное условие сходимости.

4. Знакочередующиеся ряды; признак Лейбница. Преобразование Абеля. Знакопеременные ряда: признаки Дирихле и Абеля. Пример: $\sum b_n \sin nx$, $b_n \searrow 0$.

5. Понятие абсолютной сходимости ряда. Сходимость абсолютно сходящегося ряда. Связь между поведением ряда и поведением рядов из его положительных и отрицательных членов. Признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости.

6. Сочетательное свойство сходящихся рядов. Перестановки рядов. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановках условно сходящегося ряда.

7. Умножение рядов; теорема Коши. Произведение рядов по Коши. Теорема Мертенса (формулировка). Суммирование рядов методом Чезаро. Ряда с комплексными членами; условие сходимости. Бесконечные произведения; сходимость. Связь с рядами. Абсолютная сходимость. Теорема Абеля о расходящихся знакоположительных рядах.

8. Двойной ряд; сходимость, сумма. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Условие сходимости двойного знакоположительного ряда. Повторный ряд. Линейная перестановка двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда, повторного и линейной перестановки (случай $a_{mn} \geqslant 0$). Связь между абсолютной сходимостью двойного ряда, повторного и линейной перестановки. Изменение порядка суммирования.

9. Функциональные последовательности и ряды. Сходимость, равномерная сходимость. Пример неравномерной сходимости. Критерии Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Пример: $\sum b_n \sin nx$, $b_n \searrow 0$.

10. Признак Дини равномерной сходимости. Равномерная сходимость и предельный переход. Непрерывность суммы функционального ряда.

11. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

12. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Свойства степенных рядов. Теорема Абеля. Пример $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Суммирование рядов методом Абеля. Степенные ряды в комплексной плоскости. Радиус и круг сходимости.

13. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Пример функции, не разлагающейся в ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора; достаточное условие. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора–Маклорена. Элементарные функции комплексного переменного.

14. Равномерная сходимость функции двух переменных по базе. Сведение к функциональной последовательности. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости (непрерывность предельной функции, аналог теоремы Дини, переход к пределу под знаком интеграла).

15. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность интеграла по параметру, дифференцирование и интегрирование по параметру под знаком интеграла.

16. Более сложная зависимость собственного интеграла от параметра. Непрерывность н дифференцируемость.

17. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, критерий Коши. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Абеля, Дирихле, Дини.

18. Предельный переход под знаком несобственного интеграла. Непрерывность по параметру.

19. Интегрирование несобственного интеграла по параметру (случай отрезка и полупрямой). Дифференцирование по параметру.

20. Гамма-функция Эйлера. Определение, сходимость соответствующего произведения. Функциональное соотношение для $\Gamma(s)$. Формула дополнения. Формула Эйлера–Гаусса. Формула Гаусса. Интегральное представление $\Gamma(s)$.

21. Эйлеров интеграл 2 рода. Исследование $\Gamma(s)$, $s > 0$. Эйлеров интеграл 1 рода. Связь между эйлеровыми интегралами 1 и 2 рода. Примеры:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t \cos^{b-1} t\,dt.$$

22. Метод Лапласа асимптотической оценки интегралов. Асимптотика функций Бесселя целого порядка. Асимптотика гамма-функции Эйлера (формула Стирлинга).

23. Ортогональные системы непрерывных функций на отрезке. Тригонометрическая система, её ортогональность на отрезке длины 2π. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Ряд Фурье. Оценки коэффициентов Фурье. Простейшие результаты о сходимости тригонометрического ряда Фурье. Разложение синуса в бесконечное произведение.

24. Ядра Дирихле и Фейера. Теорема Фейера и её следствия.

25. Аппроксимация в нормированных пространствах. Теоремы Вейерштрасса о плотности тригонометрических полиномов в $C_{2\pi}$ и о плотности алгебраических многочленов в $C[a,b]$. Плотность тригонометрических полиномов в пространстве $L_2'[-\pi,\pi]$.

26. ОНС в предгильбертовом пространстве. Ряд Фурье. Наилучшее приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Условия разложимости произвольного элемента в ряд Фурье. Критерии базиса для ОНС.

27. Тригонометрический ряд Фурье; сходимость в среднем, равенство Парсеваля. Ряды Фурье по синусам и ряды Фурье по косинусам на $(0,\pi)$. Комплексное пространство $L_2'[-\pi,\pi]$; ряд Фурье в комплексной форме.

28. Принцип локализации и признак Дини.

29. Признак Жордана.