МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. Т. П. Лукашенко

2 курс, 3 семестр.

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения. Признаки де Аламбера, Коши, интегральный Коши–Маклорена, Куммера, Раабе и Гаусса. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак Лейбница. Преобразование Абеля. Последовательности ограниченной вариации и их свойства. Признаки Абеля и Дирихле.

Теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса. Бесконечные произведения. Условия сходимости. Разложение функции в бесконечное произведение. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых по Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.

Критерий Маркова–Гордона перестановки предельных переходов. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Операции с равномерной сходимостью. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дини, Лейбница, Абеля и Дирихле равномерной сходимости. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из неё. Полнота пространства $C(K)$ непрерывных на компакте функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

Критерий компактности Хаусдорфа. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля–Асколи. Степенные ряды. Теорема Коши–Адамара. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля. Функции комплексного переменного. Формула Эйлера.

Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции.

Функции, зависящие от параметра; равномерное стремление к пределу; связь с равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости. Перестановка пределов, дифференцирование и интегрирование пределов функций, зависящих от параметра.

Собственные интегралы с параметром. Их свойства: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Несобственные интегралы с параметром, их равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Дини, Абеля и Дирихле. Свойства несобственных интегралов с параметром: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость (собственная и несобственная). Интеграл Дирихле.

Интегралы (функции) Эйлера, их свойства. Связь бета и гамма функций. Формула дополнения гамма-функции. Интеграл Пуассона. Формула Стирлинга.

Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя. Ортогональные системы и ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Замкнутость, равенство Парсеваля-Ляпунова, полнота; связь этих понятий.

Свёртка и её свойства. Аппроксимативная единица (δ-образная последовательность) и теорема о ней. Примеры. Теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами и тригонометрическими многочленами.

Пространство ℓ^2, его полнота.

Измеримые функции и их свойства. Теорема Егорова. Измеримость интегрируемых по Курцвейлю–Хенстоку функций. Эквивалентность интегралов Мак-Шейна и Курцвейля–Хенстока на ограниченных функциях. Неравенство Чебышёва и теорема Б. Леви (о предельном переходе) для интегралов Мак-Шейна и Курцвейля–Хенстока. Критерий интегрируемости неотрицательных измеримых функций и следствия из него. Эквивалентность интегралов Мак-Шейна и Курцвейля–Хенстока на неотрицательных функциях.

Пространство $L^2[a,b]$, его полнота. Замкнутость системы многочленов Лежандра в $L^2[-l,l]$ и тригонометрической системы в $L^2[-\pi,\pi]$. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства: линейность, инвариантность относительно сдвигов, симметрий, сжатий, дифференцирования; ряд Фурье свёртки, равенство Парсеваля–Ляпунова, почленная интегрируемость. Стремление к нулю коэффициентов Фурье интегрируемых по Мак-Шейну функций. Представление частичных сумм. Ядро Дирихле. Признак Дини и следствия из него. Принцип локализации Римана. Признак Дирихле–Жордана. Суммирование тригонометрических рядов методами Чезаро–Фейера и Абеля–Пуассона.