

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ*проф. В. И. Гаврилов**2 курс, 3 семестр.*

1. Нижний и верхний пределы ограниченной числовой последовательности. Основное свойство верхнего (нижнего) предела. Критерий сходящейся числовой последовательности. Верхний (нижний) предел произведения последовательностей.

2. Сходимость числового ряда. Критерий Коши. Необходимый признак сходящегося ряда. Линейное свойство сходящихся рядов. Остаток ряда и свойство локальности сходящихся рядов. Суммирование монотонной последовательности (a_n) , $a_n = f(a+n)$, $n \in \mathbb{N}$. Эталонный ряд $\sum 1/n^p$; сходимость, оценка остатка. Константа Эйлера.

3. Критерий сходимости положительного ряда; принцип сравнения положительных рядов. Предельная форма принципа сравнения. Общий признак сравнения положительных рядов.

4. Признаки Даламбера, Коши и Раабе сходимости положительного ряда. Предельные формы признаков Даламбера, Коши и Раабе.

5. Интегральный признак Коши–Маклорена сходимости числового ряда. Признак Гаусса сходимости положительных рядов.

6. Абсолютная сходимость числового ряда. Сходимость абсолютно сходящихся рядов. Линейное свойство абсолютно сходящихся рядов. Признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости числового ряда. Предельная форма признаков Даламбера и Коши. Свойства членов условно сходящегося ряда.

7. Сочетательный закон для сходящихся рядов. Переместительный закон для абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

8. Тожество Абеля. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда. Признак Бернулли–Лейбница сходимости знакопеременного ряда; оценка остатка.

9. Критерий сходимости последовательности комплексных чисел. Свойства сходящихся и абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами. Теорема Абеля–Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов. Произведение рядов по Коши и теорема Мертенса.

10. Сходимость бесконечного произведения. Остаточные произведения. Необходимый признак сходящегося произведения. Свойства бесконечных произведений с положительными множителями. Свойства абсолютно сходящихся бесконечных произведений.

11. Гамма-функция Эйлера. Функциональное уравнение для гамма-функции и гамма-функция натурального аргумента. Формула Вейерштрасса.

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов. Критерии равномерной сходимости. Линейное свойство и свойство аддитивности равномерно сходящихся рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

13. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Дини равномерной сходимости функционального ряда и функциональной последовательности.

14. Предельный переход, свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов и функциональных последовательностей.

15. Круг сходимости степенного ряда. Формула Коши–Адамара и ее следствия. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Единственность разложения в степенной ряд.

16. Ряд Тейлора. Достаточное условие сходимости ряда Тейлора к порождающей его функции. Разложение экспоненциальной и тригонометрических функций в степенные ряды. Экспоненциальная функция комплексного аргумента. Формула Эйлера, связывающая экспоненциальную и тригонометрические функции.

17. Разложение синуса в бесконечное произведение. Формула дополнения для гамма-функции. Дифференцируемость гамма-функции.

18. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Интегралы Фруллани. Несобственные интегралы и ряды. Главное значение несобственного интеграла; функ-

ции, интегрируемые по Коши. Признак существования главного значения. Интегральный логарифм.

19. Равномерное стремление к предельной функции по базе; критерий Коши, сведение к функциональным последовательностям. Интегрируемость, непрерывность предельной функции. Перестановка двух предельных переходов.

20. Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра: предельный переход под знак интеграла, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по параметру.

21. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла. Связь с функциональными рядами.

22. Свойства равномерно сходящихся интегралов: непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость по параметру. Аналог теоремы Дини для несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вычисление интеграла Дирихле. Разрывный множитель Дирихле.

23. Интеграл Эйлера первого рода. Непрерывность и симметричность бета-функции Эйлера. Функциональное уравнение для $B(p, q)$ и $V(p, q)$ от натуральных аргументов. Интеграл Эйлера второго рода, гамма-функция. График гамма-функции при положительных значениях аргумента. Интеграл Эйлера–Пуассона.

24. Модуль непрерывности и классы непрерывных функций. Свойство положительных тригонометрических многочленов. Многочлены $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$. Свойства свертки тригонометрических многочленов и непрерывных функций.

25. Оценка приближения непрерывной функции ее свертками с положительными тригонометрическими многочленами через модуль непрерывности функции. Теорема Фейера о равномерной аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими многочленами. Теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Первая теорема Джексона о равномерной аппроксимации тригонометрическими многочленами.

26. Определение ряда Фурье интегрируемой функции. Свойства равномерно сходящихся тригонометрических рядов. Частные суммы ряда Фурье и многочлены Фейера. Необходимое условие сходящегося ряда Фурье непрерывной функции.

27. Оценка констант Лебега и теорема Дини–Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье.

28. Сходимость в среднем функциональной последовательности. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Формула Бесселя. Неравенство Бесселя. Уравнение замкнутости тригонометрической системы. Свойство единственности рядов Фурье.

29. Лемма Римана. Признак Дини поточечной сходимости ряда Фурье. Следствия признака Дини. Принцип Римана локализации рядов Фурье и его реализации.

30. Лемма Дирихле. Признак Дирихле–Жордана поточечной сходимости ряда Фурье. Признак Дирихле поточечной сходимости ряда Фурье.

31. Соотношения между коэффициентами Фурье функции и ее производных. Почленное дифференцирование ряда Фурье. Почленное интегрирование ряда Фурье.

32*. Эффект Гиббса.

33. Интеграл Фурье; признаки Дини и Дирихле–Жордана сходимости интеграла Фурье. Простейшие свойства преобразования Фурье.