КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

проф. Е. Г. Скляренко

1/2 года, 2 курс.

1. Гладкие кривые. Параметризации. Касательная, прямая.

2. Гладкие поверхности. Способы задания.

3. Координаты на поверхности, координатные линии. Геометрия гладких кривых, касательных векторов, во внутренних координатах.

4. Карты участков поверхности, связи между ними (преобразования координат). Понятие диффеоморфизма. Матрица Якоби как матрица перехода между локальными базисами.

5. Касательная плоскость, ее уравнения для разных способов задания поверхности. Расстояния до касательной плоскости.

6. Вектор скорости и длина дуги кривой. Натуральный параметр.

7. Кривизна кривой. Соприкасающиеся плоскость и окружность. Кривизна плоской кривой.

8. Трехгранник Френе и кручение кривой. Формулы.Френе.

9. Геометрический смысл кручения. Вращение трехгранника Френе.

10. Вычислительные формулы для кривизны и кручения.

11. Натуральные уравнения плоских и пространственных кривых.

12. Метрика поверхности (первая квадратичная форма). Длины и углы кривых, площади во внутренних координатах. Вид метрики при разных способах задания поверхности. Зависимостъ выражения метрики от системы координат.

13. Кривизны и центры кривизн линий на поверхности, имеющих общий касательный вектор (теорема Менье).

14. Кривизны нормальных сечений поверхности в точке. Главные кривизны и направления. Вторая квадратичная форма поверхности.

15. Главные кривизны и направления как инварианты второй квадратичной формы. Формула Эйлера. Гауссова кривизна и ее геометрический смысл. Средняя кривизна.

16. Вычислительные формулы для главных кривизн и направлений (для разных способов задания поверхности).

17. Гладкие кривые, касательные векторы в криволинейных координатах в области евклидова пространства. Преобразования координат, диффеоморфизмы областей, инвариантность размерности. Координатные линии, матрица Якоби как матрица перехода для локальных базисов.

18. Координаты на k-поверхностях (k-многообразиях) в евклидовом пространстве, замены координат и локальные базисы, инвариантность размерности. Локальное продолжение координат на окрестности в объемлющем пространстве. Задание k-многообразия системой уравнений.

19. Евклидова метрика в криволинейных координатах. Длины дуг, углы, объемы. Преобразование метрики при замене координат. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

20. Метрика Римана в области пространства. Примеры (карты k-поверхностей). Длина дуги, угол между кривыми, объем. Изометрия и совпадение метрических тензоров. Примеры метрик, эквивалентных евклидовой.

21. Псевдоевклидовы пространства. Ортогональные дополнения. Ортонормированные базисы.

22. Псевдоортогоналъные матрицы и преобразования.

23. Псевдовращения плоскости, аналитическая запись. Угол между векторами на псевдоевклидовой плоскости.

24. Ортогональная группа евклидова пространства. Строение групп псевдовращений трехмерного, пространства и плоскости.

25. Геометрия на двумерной сфере и псевдосфере. Неравенство треугольника для центральных сечений.

26. Однородность сферы и псевдосферы, описание их групп движений.

27. Псевдосфера как плоскость Лобачевского. Модель Кляйна плоскости Лобачевского и ее группы движений. Независимость 5-го постулата Евклида. Планиметрии Евклида, Римана и Лобачевского.

28. Метрика на сфере и плоскости Лобачевского в полярных координатах. Длина окружности и площадь круга.

29. Метрика на сфере и плоскости Лобачевского, в координатах стереографической проекции.

30. Метрика на поверхности вращения, главные кривизны. Реализация участка плоскости Лобачевского на поверхности вращения, полная кривизна реализации.

31. Конформно-евклидовы метрики, изотермические координаты. Оценка суммы углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского. Конформно эквивалентные метрики.

32. Производная от функции по вектору. Дифференцирование векторных полей в аффинном пространстве. Основные свойства.

33. Дифференцирование векторных полей, касающихся поверхности, внутри поверхности (ковариантное или внутреннее дифференцирование), основные свойства.

34. Вид операции дифференцирования во внутренних координатах поверхности. Символы Кристоффеля.

35. Симметрия символов Кристоффеля. Тождества Кристоффеля.

36. Геодезическая (внутренняя) кривизна линий на поверхности. Геодезические линии.

37. Уравнения геодезических линий, существование и единственность геодезической данного направления. Геодезические линии на сфере и на плоскости Лобачевского.

38. Геодезическая линия через две точки. Геодезические радиусы и сферы вблизи точки.

39. Продолжаемость геодезической, чья длина ограничена, за пределы компактных множеств.

40. Полугеодезические координаты на (двумерной) поверхности.

41. Геодезическая как локально кратчайшая (на двумерной поверхности).

42. Параллельный перенос вектора вдоль кривой, перенос всего касательного пространства. Определение производной векторного поля, использующее параллельный перенос.

43. Вращение векторного поля вдоль кривой на (двумерной) поверхности, скорость вращения и угол поворота. Поворот касательного вектора к замкнутой кривой в результате ее обхода.

44. Угол между вектором и результатом его параллельного переноса па замкнутому контуру на (двумерной) поверхности, связь с вращением касательного вектора и суммой углов геодезического треугольника.

45. Угол от вектора до результата его параллельного переноса по замкнутому контуру и кривизна поверхности внутри контура.

46. Инвариантность гауссовой кривизны. Формула Гаусса–Бонне. Сумма углов геодезического треугольника на сфере и плоскости Лобачевского.

47. Сферическое отображение поверхности.

48. Понятие комплексной структуры на поверхности. Комплексная структура на сфере. Комплексная запись конформно-евклидовой метрики.