

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

акад. РАН А. Т. Фоменко

1/2 года, 2 курс.

1. Скалярные произведения. Псевдоевклидово скалярное произведение. Его свойства.
2. Сферы и псевдосферы. Стереографические проекции в евклидовом и псевдоевклидовом случаях.
3. Геометрия, индуцированная на псевдосферах. Модель Пуанкаре и геометрия Лобачевского.
4. Области в евклидовом пространстве. Декартовы координаты. Гладкие кривые, вектор скорости. Длина кривой в декартовых координатах.
5. Криволинейные координаты. Независимость длины кривой от параметра.
6. Полярные, сферические, цилиндрические координаты. Их особые точки и якобианы замены координат.
7. Общее понятие якобиана замены координат. Регулярные замены координат. Матрица Якоби. Координатные линии, примеры.
8. Формулы Френе на плоскости. Натуральный параметр. Кривизна плоской кривой.
9. Формулы Френе в трехмерном пространстве. Кососимметричность матрицы Френе. Кривизна и кручение.
10. k -мерные гладкие поверхности–многообразия в области евклидова пространства. Длина кривой в произвольной криволинейной системе координат.
11. Риманова метрика в области евклидова пространства. Закон преобразования компонент метрики. Углы между пересекающимися кривыми.
12. Индуцированная риманова метрика на поверхностях–многообразиях в евклидовом пространстве. Примеры.
13. Метрики на плоскости, цилиндре, сфере. Различные формы их записи.
14. Метрика на плоскости Лобачевского. Различные формы ее записи.
15. Группы движений евклидовой метрики на прямой, на плоскости, метрики на сфере.
16. Связь группы вращений двумерной сферы с трехмерным проективным пространством. Различные определения проективного пространства.
17. Топологические пространства. Хаусдорфовость. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Связность. Компактность.
18. Диффеоморфизм поверхностей–многообразий. Подмногообразия. Поверхности–многообразия с краем и без края.
19. Область в евклидовом пространстве, график гладкой функции, неособая поверхность уровня гладкой функции, — как гладкие многообразия. Связь теоремы о неявной функции с гладкими поверхностями.
20. Касательный вектор и касательное пространство.
21. Гладкие отображения поверхностей–многообразий. Дифференциал гладкого отображения.
22. Римановы многообразия. Индуцированная риманова метрика на подмногообразии.
23. Примеры двумерных поверхностей (склейки из плоских многоугольников). Формулировка теоремы классификации двумерных компактных замкнутых поверхностей (без доказательства).
24. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма. Ее явный вид для графика функции.
25. Инварианты пары форм. Средняя и гауссова кривизны. Главные направления и главные кривизны. Теорема об ортогональности главных направлений.
26. Кривые на поверхности. Нормальные сечения. Теорема об отношении первой и второй квадратичной форм. Формула Менье.
27. Теорема о совпадении собственных чисел пары форм с главными кривизнами. Формула Эйлера.
28. Средняя и гауссова кривизны для двумерных поверхностей.

- 29. Минимальные поверхности. Мыльные пленки, формулировка теоремы Пуассона–Лапласа о границе раздела двух сред.
- 30. Тензор и тензорное поле. Алгебраические операции над тензорными полями. Примеры из механики.
- 31. Симметричные и кососимметричные тензорные поля. Кососимметрические тензоры максимального ранга. Их связь с римановым объемом на поверхности–многообразии.
- 32. Внешние дифференциальные формы и их внешнее умножение.
- 33. Внешнее дифференцирование внешних форм. Замкнутые и точные формы.
- 34. Векторные поля и замкнутые, точные формы. Бездивергентные и потенциальные потоки жидкости. Лемма Пуанкаре для случая плоскости.
- 35. Группы когомологий многообразий. Примеры вычисления.
- 36. Операция “звездочка” на формах в евклидовом пространстве и ее свойства.
- 37. Примеры операции “звездочка” на плоскости и в пространстве.
- 38. Геодезические на двумерной поверхности.
- 39. Геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского.