ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 год, 3 курс, отделение математики

1. Предмет функционального анализа. Основные этапы развития. Связь с другими разделами математики и естественно-научными дисциплинами.

2. Гильбертово пространство. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Ортогонализация. Базисы. Теорема об изоморфизме.

3. Теорема об ортогональном дополнении. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

4. Метрические пространства и их пополнения. Нормированные пространства. Полинормированные линейные пространства. Топологические пространства.

5. Компактность, счётная компактность, полная ограниченность в топологических и метрических пространствах.

6. Критерий предкомпактности в пространствах $C[a,b]$, ℓ_p и $L_p[a,b]$.

7. Выпуклые и линейные непрерывные функционалы. Теорема о продолжении выпуклого функционала (теорема Хана–Банаха).

8. Сопряжённое пространство. Естественное вложение пространства во второе сопряжённое. Рефлексивные пространства. Слабая компактность единичного шара в сопряжённом пространстве.

9. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах $C[a,b]$, ℓ_p и $L_p[a,b]$.

10. Линейные операторы. Норма оператора. Сопряжённые операторы. Принцип равномерной ограниченности.

11. Обратный оператор. Устойчивость обратимости. Теорема Банаха об обратном операторе.

12. Спектр и резольвента оператора. Аналитические свойства резольвенты. Непустота спектра. Формула для спектрального радиуса.

13. Спектр самосопряжённого оператора, принадлежность спектру крайних точек числового образа, совпадение спектрального радиуса с нормой.

14. Компактные операторы, теорема Рисса о спектре компактных операторов. Теорема Фредгольма.

15. Теорема Гильберта о компактных самосопряжённых операторах.

16. Функции от самосопряжённых операторов. Спектральная теорема для самосопряжённых операторов.

17. Унитарные операторы. Оператор Фурье. Теорема Планшереля.

18. Пространства основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как полинормированные пространства. Плотность $\mathcal{D}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

19. Обобщённые функции и операции над ними. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Примеры.

20. Теоремы о представлении функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

21. Преобразование Фурье основных и обобщённых функций. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций.