

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

проф. Е. В. Троицкий

1/2 года, 3 курс

1. Метрическое пространство, открытые и замкнутые множества и их свойства.
2. Топологические пространства, внутренность, замыкание. Непрерывное отображение.
3. Гомеоморфизм. Декартово произведение.
4. Связность и линейная связность. Связь между этими понятиями.
5. Хаусдорфовость. Нормальность. Лемма Урысона. Формулировка теоремы Титце о продолжении. Разбиение единицы.
6. Компактность. Компактное хаусдорфово пространство нормально.
7. Гладкое многообразие, гладкое отображение, диффеоморфизм. Существование атласа с картами, диффеоморфными шару $\mathbb{R}^n$.
8. Существование гладкого разбиения единицы.
9. Поверхность уровня как многообразие.
10. Три определения касательного вектора, эквивалентность первых двух.
11. Касательное отображение, регулярное значение. Прообраз регулярного значения.
12. Погружение, вложение, вложение в сильном смысле, подмногообразие. Теорема о связи образа вложения и подмногообразия. Формулировка леммы Сарда.
13. Слабая теорема Уитни.
14. Касательное расслоение.
15. Понятие ориентированного многообразия с краем. Край. Ориентация края гладкого ориентированного многообразия.
16. Риманова метрика, тензорный подход, существование. Прообраз, индуцированная метрика.
17. Тензоры, сумма, произведение, свертка, альтернирование и симметрирование тензоров.
18. Тензорные поля и полилинейные отображения.
19. Поднятие и опускание индексов у тензора.
20. Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров.
21. Дифференциальные формы и алгебраические операции над ними.
22. Представление дифференциальных форм в локальных координатах.
23. Ковариантный градиент векторного поля в евклидовом пространстве. Закон изменения коэффициентов связности при замене координат.
24. Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности в евклидовом пространстве.
25. Аффинная связность. Ее свойства и характеристика ими.
26. Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой.
27. Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.
28. Операция параллельного перенесения. Геометрическая интерпретация ковариантной производной. Связность на поверхности в евклидовом пространстве.
29. Сохранение длины и угла между векторами при параллельном перенесении.
30. Геодезические. Существование и единственность при заданных начальных условиях.
31. Экспоненциальное отображение. Теорема о существовании окрестности с условием единственности "короткой" геодезической.
32. Тензор кривизны Римана.
33. Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.
34. Формулы для компонент тензора кривизны римановой связности.
35. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с гауссовой кривизной поверхности.
36. Геометрический смысл компонент тензора Римана.
37. Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой среди гомотопных при нулевом тензоре кривизны.
38. Внешний дифференциал и его свойства.

- 39. Понятие когомологий гладкого многообразия. Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении. Связь с гомотопиями.
- 40. Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат.
- 41. Общая формула Стокса.
- 42. Объем риманова ориентированного компактного многообразия.