

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

проф. Е. Г. Скляренко

1/2 года, 3 курс

1. Финитные функции. Разбиение единицы, подчиненное покрытию.
2. Вложение компактного многообразия в евклидово пространство.
3. Наличие на гладких многообразиях римановых метрик.
4. Касательные векторы как касательные к кривым, как одновалентные контравариантные тензоры и как дифференцирования в кольце функций.
5. Дифференциал гладкого отображения многообразий.
6. Гладкие векторные поля и их интегральные траектории.
7. Касательное расслоение многообразия. Гладкие расслоения.
8. Структура многообразия на прообразах точек регулярного отображения.
9. Расслоенность гладкого регулярного отображения многообразий с компактными прообразами точек.
10. Коммутатор векторных полей, его свойства.
11. Признак голономности базисных векторных полей.
12. Ковекторные поля — линейные дифференциальные Формы. Базисные ковекторные поля.
13. Тензорные поля. Свойство локальности.
14. Сложение тензоров, умножение на числа и функции, тензорное умножение. Базисные тензорные поля.
15. Операция свертки. Примеры.
16. Симметричные и кососимметричные тензоры. Операции симметрирования и альтернирования.
17. Общие сведения о пространствах кососимметричных тензоров различных валентностей.
18. Внешнее умножение. Свойства.
19. Дифференциальные формы как поля кососимметричных ковариантных тензоров. Базисные поля и координаты дифференциальных форм.
20. Преобразование координат дифференциальных форм и самих базисных полей при смене координат на карте.
21. Ориентируемые многообразия. Ориентирующие атласы. Ориентирующая дифференциальная форма.
22. Внешнее дифференцирование. Вид операции в координатах.
23. Внешнее дифференцирование и операции над векторными полями в трехмерном пространстве.
24. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства).
25. Действие гладкого отображения многообразий на дифференциальные формы и на когомологии де Рама.
26. Свойство гомотопии для когомологий де Рама.
27. Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама. Теорема Пуанкаре и ее следствия.
28. Интегрирование дифференциальных форм, в том числе по подмногообразиям.
29. Сопоставление интегрирования дифференциальных форм с интегрированием функций в случае риманова многообразия. Сопоставление с интегралами от векторных полей по кривым и поверхностям в трехмерном пространстве.
30. Общая формула Стокса, частные случаи и следствия (для векторных полей в трехмерном пространстве, для старших когомологий де Рама).
31. Дифференцирование векторных полей в евклидовом пространстве, основные свойства.
32. Пространство аффинной связности — ковариантное дифференцирование векторных полей. Координатная запись, символы Кристоффеля. Эквивалентные связности. Связности, эквивалентные классической аффинной.
33. Симметричные аффинные связности.

34. Дифференцирование и параллельный перенос векторов вдоль кривой. Перенос касательного пространства. Определение производной от векторного поля через предельный переход.

35. Перенос вдоль кривой ковекторов и любых тензоров. Перенос тензорного произведения, свертки.

36. Ковариантное дифференцирование тензоров. Производная от тензорного произведения, от свертки.

37. Координатная запись производной от ковекторного поля, от поля тензоров. Условия параллельности. Градиент тензора. Дивергенция векторного поля.

38. Условия совместимости аффинной связности с римановой метрикой.

39. Теорема Леви–Чивита о существовании и единственности аффинной связности на римановом многообразии.

40. Ковариантное дифференцирование (аффинная связность) на подмногообразиях евклидовых (и псевдоевклидовых) пространств, на подмногообразиях римановых многообразий.

41. Геодезические линии и их уравнения. Существование и единственность геодезической в точке по заданному направлению.

42. Кривизна кривой в римановом многообразии. Геодезическая (внутренняя) кривизна линий на подмногообразиях евклидова пространства. Геодезические на сфере и плоскости Лобачевского.

43. Элементы вариационного исчисления: лагранжиан, уравнения Эйлера для экстремалей.

44. Геодезические линии как экстремали функционалов действия и длины.

45. Поведение геодезических в окрестности точки: существование и конечная продолжительность. Бесконечные геодезические на геодезически полных многообразиях.

46. Геодезические, соединяющие пары близких точек. Нормальные (римановы) координаты. Геодезический шар. Геодезические радиусы и сферы, их ортогональность. Экстремальность геодезических.

47. Тензор кривизны риманова многообразия.

48. Свойства тензора кривизны и его координат.

49. Признаки локальной евклидовости римановой метрики.

50. Кривизна риманова многообразия в двумерном направлении. Локальная евклидовость пространства нулевой кривизны.

51. Кривизна в двумерном направлении как полная кривизна геодезической поверхности.

52. Тензор кривизны для поверхности в трехмерном пространстве.

53. Вращение векторного поля вдоль пути (в том числе замкнутого) в двумерном римановом многообразии.

54. Обнесение вектора по замкнутому контуру в двумерном многообразии. Сумма углов геодезического треугольника.

55. Геометрический смысл тензора кривизны (обнесение вектора по контурам, касающимся бивектора).

56. Геометрический смысл кривизны в двумерном направлении (обнесение векторов этого направления).