ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

проф. А. С. Мищенко

1/2 года, 3 курс

1. Тензорная алгебра.

- (a) Тензоры, валентность тензоров, сумма, свертка.
- (b) Альтернирование и симметрирование тензоров.
- (c) Классические примеры тензоров, градиент функции, функционал, скалярное произведение, линейный оператор.
- (d) Тензорный вид коэффициентов линейной зависимости между тензорами.
- (e) Тензорное произведение, тензорная интерпретация следа и детерминанта матрицы.
- (f) Поднятие и опускание индексов у тензора.
- (g) Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров.
- (h) Тезорный характер операций векторного и смешанного произведений векторов в $\mathbb{R}^3$.

2. Тензорный анализ.

- (a) Ковариантный градиент векторного поля. Закон изменения коэффициентов связности при замене координат.
- (b) Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности.
- (c) Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.
- (d) Формула закона преобразования коэффициентов связности при замене координат.
- (e) Операция параллельного перенесения.
- (f) Геометрическая интерпретация ковариатной производной.
- (g) Связность на поверхности в евклидовом пространстве.

3. Геодезические.

- (a) Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой.
- (b) Сохранение длины угла между векторами при параллельном перенесении.
- (c) Геодезические линии, уравнение геодезической.
- (d) Изометрия. Теорема о сохранении геодезических при изометрии.
- (e) Геодезические на плоскости и сфере. Группы движений прямой, плоскости и сферы.
- (f) Псевдосфера. Геодезические на псевдосфере.
- (g) Теорема о том, что достаточно близкие точки соединяются единственной геодезической.

4. Риманова геометрия.

- (a) Тензор кривизны риманового многообразия, формулы тензора кривизны.
- (b) Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.
- (c) Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с гауссовой кривизной поверхности.

- (d) Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой при нулевом тензоре кривизны.
- (e) Теорема о приведении метрического тензора к единичной матрице в случае нулевого тензора кривизны поверхности.

5. Дифференциальные формы и когомологии де Рама.
   - (a) Дифференциальные формы и алгебраические операции над ними.
   - (b) Внешний дифференциал и его свойства.
   - (c) Представление дифференциальных форм в локальных координатах.
   - (d) Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении.
   - (e) Понятие когомологии гладкого многообразия. Связь с решениями уравнения $dT = S$.
   - (f) Вычисление когомологии окружности.
   - (g) Независимость прообраза класса когомологий от деформации отображения.
   - (h) Лемма Пуанкаре.
   - (i) Группы когомологий евклидова пространства.
6. Интегрирование дифференциальных форм.
   - (a) Понятие ориентированного многообразия с краем. Ориентация края гладкого ориентированного многообразия.
   - (b) Ориентируемость многообразия S^1, S^2, S^n, T^2.
   - (c) Ориентируемость комплексно-аналитических многообразий.
   - (d) Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат.
   - (e) Общая формула Стокса.
   - (f) Формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского.
   - (g) Интегралы первого и второго рода в векторном анализе.
   - (h) Объем риманова ориентированного компактного многообразия.
7. Степень отображения
   - (a) Регулярные точки отображений. Лемма Сарда.
   - (b) Теорема Уитни о вложении компактного многообразия в евклидово пространство.
   - (c) Степень отображения и ее свойства.
   - (d) Группа гомеоморфизмов, порожденная векторным полем
   - (e) Выражение интеграла дифференциальной формы через степень отображения.
   - (f) Гауссово сферическое отображение.
   - (g) Теорема Гаусса–Бонне.
8. Вариационные задачи в геометрии
   - (a) Уравнение Эйлера для вариационной задачи.
   - (b) Уравнение экстремалей для функционала действия на римановом многообразии.
   - (c) Уравнение экстремалей для функционала длины.