ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

акад. РАН А. Т. Фоменко

1/2 года, 3 курс, отделение математики

1. Общее определение многообразия. Атлас, карты, координатные отображения. Функции перехода (склейки). Топологические и гладкие многообразия. Ориентируемость и неориентируемость.

2. Три эквивалентных определения касательного вектора. Погружения и вложения гладких многообразий. Связь с гладкими поверхностями в евклидовом пространстве: формулировка теорем Уитни (без доказательства). Общее понятие риманова многообразия.

3. Линейные преобразования евклидова пространства и движения римановой метрики, заданной в области евклидова пространства.

4. Группа изометрий римановой метрики. Ортогональные преобразования сохраняют евклидову метрику. Некоторые матричные группы преобразований.

5. Комплексное пространство. Длина кривой. Связь комплексных переменных с вещественными координатами. Формулировка комплексного варианта теоремы о неявных функциях.

6. Группа движений метрики плоскости Лобачевского. Дробно-линейные преобразования.

7. Связь группы движений метрики Лобачевского с группой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

8. Алгебраические функции и их римановы поверхности. Важные примеры алгебраических функций, когда полином не имеет кратных корней.

9. Многозначность алгебраических функций. Римановы поверхности как области однозначности алгебраических функций. Ветви, точки ветвления. Примеры.

10. Склейка римановой поверхности из нескольких листов. Риманова поверхность для важных примеров алгебраических функций.

11. Интеграл внешней формы по поверхности-подмногообразию. Формулировка теоремы Стокса.

12. Доказательство теоремы Стокса.

13. Частные случаи формулы Стокса на плоскости и в трехмерном пространстве (Гаусс, Грин, Остроградский, Коши).

14. Введение ковариантного дифференцирования (связности) в криволинейных координатах в евклидовом пространстве. Появление символов Кристоффеля.

15. Вычисление явного вида операции “набла” (связности) на векторах, ковекторах и линейных операторах в криволинейных координатах в евклидовом пространстве.

16. Общее определение аффинной связности = ковариантного дифференцирования на гладком многообразии. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности.

17. Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования.

18. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности.

19. Параллельные перенос в аффинной связности. Уравнение параллельного переноса. Геодезические.

20. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезических. Двумерный случай.

21. Тензор кривизны Римана.

22. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Пример из физики: уравнения Эйнштейна.

23. Теорема о скалярной кривизне двумерной поверхности и гауссовой кривизне.

24. Критические и регулярные значения гладкого отображения. Теорема Сарда (без доказательства). Степень гладкого отображения. Гладкая гомотопия.

25. Теорема об инвариантности степени при гомотопии и независимость от выбора точки.

26. Примеры вычисления степени. Основная теорема алгебры (о числе корней полинома).

27. Степень отображения и интегралы от внешних форм максимальной степени. Степень гауссова отображения.

28. Индекс векторного поля и степень отображения. Вычисление индексов векторных полей.

29. Вариационные принципы. Функционалы, их экстремали и уравнения Эйлера–Лагранжа. Примеры из механики и физики.

30. Функционалы длины и действия кривой. Геодезические как кратчайшие (то есть как линии локально минимальной длины).

31. Элементы симплектической геометрии. Симплектическая структура.

32. Гамильтоновы уравнения и их геометрический смысл. Примеры из механики и физики.

33. Интегрируемые гамильтоновы уравнения и теорема Лиувилля (без доказательства). Пример: уравнения движения тяжелого твердого тела.