ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1/2 года, 2 курс

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры и т.д.). Различные свойства этих систем.
2. Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков в $\mathbb{R}^n$ и ее σ-аддитивность.
3. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Внешние меры Лебега и Жордана. Меры Лебега и Жордана. Их свойства.
4. Полнота и непрерывность мер. Мера Бореля. Меры Лебега–Стилтьеса на прямой и в $\mathbb{R}^n$. σ-конечные меры. Теоремы о структуре измеримых множеств.
5. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.
6. Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства.
7. Теоремы Егорова и Лузина.
8. Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства.
9. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.
10. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
11. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева.
12. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке в $\mathbb{R}$.
13. Прямое произведение мер. Теорема Фубини.
14. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
15. Теорема Радона–Никодима.
16. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p.
17. Полнота пространств L_p. Плотные множества функций в $L_p(a, b)$.
18. Дифференцирование интеграла Лебега на отрезке по переменному верхнему пределу.
19. Абсолютно непрерывные функции на отрезке и их связь с интегралами Лебега.
20. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Лебега по отрезку.
21. Гильбертовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского.
22. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму.
23. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовых пространствах.
24. Процесс ортогонализации Гильберта–Шмидта.
25. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
26. Теорема Рисса–Фишера.
27. Линейные функционалы в гильбертовых пространствах. Их общий вид.