ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

проф. Е. В. Чижонков

1 год, 4 курс, отделение механики

1. Погрешность метода и вычислительная погрешность. Устойчивые и неустойчивые алгоритмы.

2. Начально-краевая задача для уравнений Навье–Стокса, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости, как базовый пример численного решения задачи. Вопросы существования и единственности в дифференциальном случае.

3. Этапы построения алгоритма: дискретизация по времени, дискретизация по пространству, выбор метода для решения нелинейных уравнений, выбор метода для решения линейных уравнений.

4. Дискретизация по времени: модельная задача

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Простейшие методы. Понятия локальной и глобальной ошибок. Порядок метода. Одношаговые методы: явные и неявные. Выбор переменного шага.

5. Алгебраическая интерполяция. Многочлен Лагранжа. Оценка погрешности. Многочлены Чебышева и их свойства.

6. Многошаговые методы. Построение методом неопределенных коэффициентов. Многозначные методы интегрирования.

7. Дискретизация по времени: жесткие системы. Пример. Определение. Простейшие неявные методы. Экспоненциальный метод. Явный метод Лебедева с переменными шагами.

8. Пример дискретизации по времени уравнений Навье–Стокса (чисто неявная схема). Особенность постановки для дискретизации по пространству (краевая задача).

9. Основные подходы к дискретизации по пространству: метод конечных разностей и метод конечных элементов. Модельная задача для изучения подходов:

$$-(k(x)y')' + p(x)y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

10. Аппроксимация уравнения и краевых условий. Определения аппроксимации и устойчивости. Энергетический метод исследования устойчивости. Определение сходимости. Теорема Филиппова.

11. Основные идеи метода конечных элементов: вариационная постановка задачи, метод Ритца, проекционная теорема, построение кусочно полиномиальных пробных функций, вычисление матриц жесткости и масс, оценка точности аппроксимации Ритца для линейных элементов.

12. Численное интегрирование. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Ортогональные многочлены и квадратуры Гаусса. Составные квадратурные формулы. Правило Рунге оценки погрешности. Основные приемы для вычисления нерегулярных интегралов. Интегрирование быстроосциллирующих функций.

13. Метод прогонки решения трехдиагональных систем и его устойчивость.

14. Метод конечных разностей для уравнения Пуассона в двумерном случае. Аппроксимация, исследование устойчивости методом Фурье. Решение методом разделения переменных. Дискретное преобразование Фурье. Идея быстрого дискретного преобразования Фурье. Решение двумерной задачи разложениями в двойной и однократный ряды. Оценки затрат арифметических действий.

15. Метод конечных элементов для уравнения Пуассона в двумерном случае. Треугольные элементы первого и второго порядков. Матрица жесткости. Оценки погрешности. Четырехугольные элементы первого порядка. Матрица жесткости. Оценка погрешности.

16. Аппроксимация краевых условий третьего рода на прямолинейном участке границы в методах конечных разностей и конечных элементов. Аппроксимация условий Дирихле на криволинейной границе в методах конечных разностей и конечных элементов.

17. Решение гиперболических уравнений на примере уравнения переноса. Спектральных признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов. Схемы для нелинейных задач с разрывными решениями.

18. Решение параболических уравнений на примере уравнения теплопроводности. Исследование устойчивости простейших схем в равномерной метрике. Исследование аппроксимации и устойчивости схемы с весами методом Фурье.

19. Метод конечных разностей и метод конечных элементов для уравнения конвекции–диффузии. Аппроксимации конвективных членов.

20. Условие Ладыженской–Бабушки–Брецци для задачи Стокса. Пример схемы, не удовлетворяющей условию. Примеры устойчивых схем. Дискретизация по пространству уравнений Навье–Стокса. Специфика получающихся систем нелинейных алгебраических уравнений.

21. Методы решения нелинейных уравнений. Теорема о сходимости метода Ньютона. Модификации метода Ньютона для уравнений вида $L(u)u = F$. Выбор итерационных параметров из вариационных принципов. Структура вспомогательных систем линейных алгебраических уравнений.

22. Решение линейных уравнений с $A = A^T > 0$. Метод сопряженных градиентов. Свойства ортогональности и оценка скорости сходимости. Экономичные реализации. Обобщенные (предобусловленные) методы на примере оптимального одношагового алгоритма. Обобщенный метод сопряженных градиентов.

23. QR-разложение матрицы. Вычислительные аспекты ортогонализации. Применение к задачам на собственные значения. Метод простой итерации и итерирование подпространства.

24. Обобщенный метод минимальных невязок для невырожденных линейных систем. Пространства Крылова. Вычислительные аспекты. Версия алгоритма для симметричных матриц.

25. Прямые методы для линейных систем. Вычислительная погрешность при LU-разложении. Метод прогонки как частный случай для трехдиагональных матриц. Уточнение решение. Идеи методов неполной факторизации.

26. Релаксационные методы для линейных систем: Якоби, Зейделя, верхняя релаксация и ее симметричный вариант.

27. Специальные алгоритмы для сеточных систем уравнений. Двухсеточный и многосеточные методы на примере простейшей краевой задачи для ОДУ второго порядка.

28. Примеры алгоритмов для реализации одного временного шага при решении уравнений Навье–Стокса. Критерии точности и их согласование.

29. Задача из теории осреднения (уравнение теплопроводности). Метод фиктивных областей. Итерации в подпространстве.

30. Задача из теории упругости.

31. Понятие о моделировании газодинамических течений на основе кинетически согласованных схем. Связь с уравнениями Эйлера. Искусственная вязкость.

32. Нелинейное уравнение Шредингера. Задачи физики плазмы.