Вычисление длин ребер минимальных остовных деревьев через расстояния Громова–Хаусдорфа

А. А. Тужилин

5 мая 2016 г.

Аннотация

В работе показывается, как можно вычислить длины ребер минимального остовного дерева конечного метрического пространства через расстояния Громова–Хаусдорфа от этого пространства до симплексов с достаточно длинной стороной. Здесь под симплексами мы понимаем конечные метрические пространства, все ненулевые расстояний в которых одинаковы. В качестве приложения мы сводим задачу поиска минимального дерева Штейнера и минимального заполнения к максимизации суммарного расстояния до некоторого набора симплексов в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Библиография: 7 названий.

Введение

В работе обнаружена замечательная связь между длинами ребер минимального остовного дерева, построенного на конечном метрическом пространстве, и расстояниями Громова–Хаусдорфа от этого метрического пространства до симплексов достаточно большого диаметра, где под симплексами мы понимаем конечные метрические пространства, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. Эта связь является следствием минимаксной формулы для длин ребер минимального остовного дерева, которая, по-существу, похожа на формулу вычисления собственных чисел самосопряженного оператора. В качестве следствия мы выводим формулы для вычисления длин минимальных остовных деревьев, минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений через расстояния Громова–Хаусдорфа.

Автор благодарит своего коллегу и традиционного соавтора Александра О. Иванова за полезные замечания.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X. Как правило, нас будут интересовать мощности конечных множеств X, так что для них $\#X$ — число элементов в X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B)\ \&\ B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A} |aB|, \sup_{b\in B} |Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы $\sigma(x)$ и $\sigma(A)$, а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы $\sigma^{-1}(y)$ и $\sigma^{-1}(B)$.

Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x, y), (x', y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Предложение 1.1 ([2])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac12 \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\bigr\}.$$

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X, Y)$ конечно, поэтому существует $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, для которого $d_{GH}(X, Y) = \frac12 \operatorname{dis} R$. Каждое такое соответствие R назовем *оптимальным*. Отметим, что оптимальные соответствия существуют и для любых метрических компактов X и Y, см. [3]. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$.

Используя соответствия, легко доказывается следующий хорошо известный факт. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X растяжением всех расстояний в λ раз.

Предложение 1.2 ([2]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$. Более того, при $\lambda \ne 1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda > 0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Будем говорить, что граф G *определен на метрическом пространстве* X, если $V \subset X$. Для каждого такого графа определены *длины* $|e|$ его *ребер* $e = vw$ как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также *длина* $|G|$ самого *графа* G как сумма длин всех его ребер.

Если $M \subset X$ — произвольное непустое конечное подмножество, и $G = (V, E)$ — связный граф на X, то будем говорить, что граф G *соединяет* M, если $M \subset V$. Точная нижняя грань длин связных графов, соединяющих $M \subset X$, называется *длиной минимального дерева Штейнера на* M и обозначается через $\operatorname{smt}(M, X)$. Каждый связный граф G, соединяющий M и такой, что $|G| = \operatorname{smt}(M, X)$, является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера на* M. Множество всех минимальных деревьев Штейнера на M обозначим через $\operatorname{SMT}(M, X)$. Заметим, что множество $\operatorname{SMT}(M, X)$ может быть пустым, а $\operatorname{SMT}(M, X)$ и $\operatorname{smt}(M, X)$ зависят не только от расстояний между точками из M, но и от устройства объемлющего пространства X: изометричные M, лежащие в разных метрических пространствах X, могут соединяться минимальными деревьями Штейнера разной длины. Подробности о теории минимальных деревьев Штейнера можно найти, например, в [4] или [5].

Обозначим через $\mathcal{T}(M, X)$ множество всех деревьев $G = (V, E)$ на X, которые соединяют M и удовлетворяют $\#V \le 2\#M - 2$. Из результатов [4] легко извлекается следующее предложение.

Предложение 1.3 ([4]). *Для произвольного метрического пространства X и любого его непустого конечного подмножества M имеем*

$$\operatorname{smt}(M, X) = \inf_{G \in \mathcal{T}(M,T)} |G|.$$

Пусть M — конечное метрическое пространство. Определим число $\operatorname{mst}(M)$, положив его равным длине кратчайшего дерева среди деревьев вида (M, E). Полученная величина называется *длиной минимального остовного дерева на* M; дерево $G = (M, E)$, для которого $|G| = \operatorname{mst}(M)$, называется *минимальным остовным деревом на* M. Заметим, что для любого M на нем всегда существует минимальное остовное дерево. Множество всех минимальных остовных деревьев на M обозначим через $\operatorname{MST}(M)$.

Предложение 1.3 может быть естественным образом переписано в терминах минимальных остовных деревьев. Для конечного метрического пространства M обозначим через $\mathcal{M}(M) \subset \mathcal{M}$ множество классов изометрии метрических пространств V таких, что $M \subset V$ и $\#V \le 2\#M - 2$. Если M — конечное подмножество метрического пространства X, то через $\mathcal{M}(M, X)$ обозначим подмножество в $\mathcal{M}(M)$, составленное из классов изометрии множеств $V \subset X$ таких, что $M \subset V$ и $\#V \le 2\#M - 2$.

Предложение 1.4 ([4]). *Для произвольного метрического пространства X и любого его непустого конечного подмножества M имеем*

$$\operatorname{smt}(M, X) = \inf_{V \in \mathcal{M}(M,X)} \operatorname{mst}(V).$$

Фиксируем теперь конечное метрическое пространство M. Будем изометрично вкладывать его в различные метрические пространства X, и для каждого такого вложения вычислим длину минимального дерева Штейнера на образе множества M. “Кратчайшую” длину минимального дерева Штейнера назовем *длиной минимального заполнения* M и будем обозначать через $\mathrm{mf}(M)$. Чтобы избежать проблем типа парадокса Кантора, дадим более аккуратное определение. Число $\mathrm{mf}(M)$ — это точная нижняя грань чисел r, для которых существуют метрическое пространство X и изометричное вложение $\mu\colon M\to X$, $\mathrm{smt}\bigl(\mu(M),X\bigr)\le r$.

Из [6] легко выводится следующий результат.

Предложение 1.5 ([6]). *Для любого конечного метрического пространства M имеем*

$$\mathrm{mf}(M)=\inf_{V\in\mathcal{M}(M)}\mathrm{mst}(V).$$

2 mst-спектр конечного метрического пространства

Отметим, что минимальное остовное дерево, вообще говоря, определено неоднозначно. Для $G\in\mathrm{MST}(M)$ через $\sigma(G)$ обозначим вектор длин ребер дерева G, упорядоченных по убыванию. Хорошо известен следующий результат, доказательство которого мы приведем для полноты изложения.

Предложение 2.1. *Для любых $G_1,G_2\in\mathrm{MST}(M)$ имеем $\sigma(G_1)=\sigma(G_2)$.*

Доказательство. Напомним стандартный алгоритм преобразования одного минимального остовного дерева в другое [7].

Пусть $G_1\ne G_2$. Положим $G_i=(M,E_i)$, тогда $E_1\ne E_2$ и $\#E_1=\#E_2$, следовательно, существует $e\in E_2\setminus E_1$. В графе $G_1\cup e$ имеется цикл C, содержащий ребро e. В цикле C нет более длинного ребра, чем e, так как иначе $G_1\notin\mathrm{MST}(M)$. Лес $G_2\setminus e$ состоит из двух деревьев, множества вершин которых обозначим через V' и V''. Ясно, что $M=V'\sqcup V''$. Цикл C содержит ребро $e'\ne e$, соединяющее вершину из V' с вершиной из V''. Это ребро не лежит в E_2, иначе G_2 содержало бы цикл. Поэтому $e'\in E_1\setminus E_2$. Граф $G_2\cup e'$ также содержит некоторый цикл C'. В силу выбора e', цикл C' содержит также ребро e. Аналогично сказанному выше, длина ребра e меньше или равна длины ребра e', иначе $G_2\notin\mathrm{MST}(M)$. Следовательно, $|e|=|e'|$. Заменив в G_1 ребро e' на e, получим дерево G_1' той же длины, т.е. также минимальное остовное дерево, причем G_1' и G_2 имеют на одно общее ребро больше, чем деревья G_1 и G_2. Таким образом, за конечное число шагов мы перестроим дерево G_1 в дерево G_2, проходя при этом через минимальные остовные деревья. Осталось заметить, что $\sigma(G_1')=\sigma(G_1)$, откуда $\sigma(G_1)=\sigma(G_2)$. □

Предложение 2.1 обосновывает следующее определение.

Определение 2.2. Для любого конечного метрического пространства M через $\sigma(M)$ обозначим $\sigma(G)$ для произвольного $G\in\mathrm{MST}(M)$ и назовем mst-*спектром пространства* M.

Конструкция 2.3. Для множества M через $\mathcal{D}_k(M)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества M на k его непустых подмножеств. Пусть теперь M — метрическое пространство и $D=\{M_1,\dots,M_k\}\in\mathcal{D}_k(M)$. Положим $\alpha(D)=\min\bigl\{|M_iM_j|:i\ne j\bigr\}$.

Теорема 2.4. *Пусть M — конечное метрическое пространство и $\sigma(M)=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$. Тогда*
$$\sigma_k=\max\bigl\{\alpha(D):D\in\mathcal{D}_{k+1}(M)\bigr\}.$$

Доказательство. Пусть $G=(M,E)\in\mathrm{MST}(M)$ и множество E упорядочено так, что $|e_i|=\sigma_i$. Обозначим через $D=\{M_1,\dots,M_{k+1}\}$ разбиение множества M на множества вершин деревьев леса $G\setminus(\cup_{i=1}^k e_i)$.

Лемма 2.5. *Имеем $\alpha(D)=|e_k|$.*

Доказательство. Действительно, выберем произвольные M_i и M_j, $i\ne j$, в них — точки P_i и P_j соответственно, и пусть γ — единственный путь в G, соединяющий P_i и P_j. Тогда γ содержит некоторое ребро e_p, $1\le p\le k$. Но, в силу минимальности дерева G, имеем $|P_iP_j|\ge|e_p|\ge\min_{i=1}^k|e_i|=|e_k|$, откуда $|M_iM_j|\ge|e_k|$, так что $\alpha(D)\ge|e_k|$. С другой стороны, если i и j выбрать так, чтобы e_k соединяло M_i и M_j, то получим $\alpha(D)\le|M_iM_j|=|e_k|$. □

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $D'=\{M_1',\dots,M_{k+1}'\}$.

Лемма 2.6. *Имеем $\alpha(D')\le\alpha(D)$.*

Доказательство. В силу леммы 2.5, достаточно показать, что $\alpha(D')\le|e_k|$. Обозначим через E' множество, состоящее из всех ребер $e_p\in E$, для каждого из которых существуют M_i' и M_j', $i\ne j$, такие, что e_p соединяет M_i' и M_j'. В силу связности G, множество E' состоит не менее чем из k ребер, иначе множество индексов $\{1,\dots,k+1\}$ разбивается на два непустых подмножества I и J таких, что множества $\cup_{i\in I}M_i'$ и $\cup_{j\in J}M_j'$, порождающие разбиение M, не соединяются ни одним ребром из E. С другой стороны, если некоторые M_i' и M_j' соединяются ребром $e'\in E$, то $|M_i'M_j'|\le|e'|$, откуда $\alpha(D')=\min|M_i'M_j'|\le\min_{e'\in E'}|e'|\le|e_k|$. □

Лемма 2.6 завершает доказательство теоремы. □

3 Вычисление mst-спектра с помощью расстояний Громова–Хаусдорфа

Конструкция 3.1. Для $\lambda>0$ обозначим через $\lambda\Delta_n$ метрическое пространство, состоящее из точек $\{1,\dots,n\}$, все ненулевые расстояния между которыми равны λ. При $\lambda=1$ пространство $\lambda\Delta_n$ будем для краткости обозначать через Δ_n.

В настоящем разделе мы покажем, что mst-спектр n-точечного метрического пространства выражается линейным образом через расстояния Громова–Хаусдорфа от этого метрического пространства до симплексов $\lambda\Delta_2,\dots,\lambda\Delta_{n+1}$ при $\lambda\ge2\operatorname{diam}X$.

Теорема 3.2. *Пусть $X\in\mathcal{M}$ — конечное метрическое пространство, $\sigma(X)=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$, $\operatorname{diam}X\le1/2$. Тогда $\sigma_k=1-2d_{GH}(X,\Delta_{k+1})$.*

Доказательство. Пусть $R\in\mathcal{R}(\Delta_{k+1},X)$ и положим $X_i=R(i)$. Обозначим через δ_R число, равное 1, если для некоторого $x\in X$ имеем $\#R^{-1}(x)\ge2$, и 0 в противном случае. Заметим, что $\delta_R=0$ тогда и только тогда, когда $\{X_i\}$ — разбиение X.

Из определения искажения непосредственно получаем

$$\operatorname{dis} R = \max\Big[\delta_R, \max\{\operatorname{diam} X_i : i = 1, \ldots, k+1\}, \max\big\{1 - |x_i x_j| : x_i \in X_i,\, x_j \in X_j,\, i \neq j\big\}\Big] =$$
$$= \max\Big[\delta_R, \max\{\operatorname{diam} X_i : i = 1, \ldots, k+1\}, 1 - \min\big\{|X_i X_j| : i \neq j\big\}\Big].$$

Так как, в сделанных предположениях, $\operatorname{diam} X_i \le 1/2$ при всех i, а $1-\min\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\} < 1$, то для каждого R такого, что $\{X_i\}$ — разбиение X, имеем $\operatorname{dis} R < 1$. Так как в изучаемых ситуациях $k+1 \le n$, такие R, для которых $\{X_i\}$ — разбиение X, существуют, поэтому для каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(\Delta_{k+1}, X)$ имеем $\delta_R = 0$.

Обозначим через $\mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)$ множество тех соответствий из $\mathcal{R}(\Delta_{k+1}, X)$, для которых $\{X_i\}$ — разбиение X. Из сказанного выше вытекает, что $\mathcal{R}_{\rm opt}(\Delta_{k+1}, X) \subset \mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)$, поэтому

$$2d_{GH}(\Delta_{k+1}, X) = \min\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)\big\}.$$

Кроме того, для каждого разбиения $D = \{X_1, \ldots, X_{k+1}\} \in \mathcal{D}_{k+1}(X)$ множество $\cup_{i=1}^{k+1}\{i\} \times X_i$ является соответствием из $\mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)$. Иными словами, все разбиения $D \in \mathcal{D}_{k+1}(X)$ порождается некоторыми соответствиями из $\mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)$. Так как $|X_iX_j| \le \operatorname{diam} X \le 1/2$, то

$$1 - \min\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\} \ge 1/2 \ge \max\{\operatorname{diam} X_i : i = 1, \ldots, k+1\},$$

откуда

$$\operatorname{dis} R = 1 - \min\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\} = 1 - \alpha\big(\{X_i\}\big).$$

Вспоминая теорему 2.4, получаем

$$2d_{GH}(\Delta_{k+1}, X) = \min\Big[1-\alpha\big(\{X_i\}\big) : R \in \mathcal{R}_p(\Delta_{k+1}, X)\Big] = 1-\max\big[\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(X)\big] = 1-\sigma_k.$$

□

Следующий результат мгновенно вытекает из теоремы 3.2 и предложения 1.2.

Следствие 3.3. *Пусть $X \in \mathcal{M}$ — конечное метрическое пространство, $\sigma(X) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, $\lambda \ge 2\operatorname{diam} X$. Тогда $\sigma_k = \lambda - 2d_{GH}(X, \lambda\Delta_{k+1})$.*

Замечание 3.4. Легко видеть, что, в предположениях следствия 3.3, при каждом $m > n$ имеем $d_{GH}(X, \lambda\Delta_m) = \lambda/2$, поэтому правая часть равенства из этого следствия равна 0.

Из замечания 3.4 и теоремы 3.2 мгновенно получаем формулу для длины минимального остовного дерева.

Следствие 3.5. *Пусть $X \in \mathcal{M}$ — конечное метрическое пространство и $\lambda \ge 2\operatorname{diam} X$, тогда*

$$\operatorname{mst} X = \sum_{k=1}^{\infty}\big[\lambda - 2d_{GH}(X, \lambda\Delta_{k+1})\big] = \lambda(\#X - 1) - 2\sum_{k=1}^{\#X-1} d_{GH}(X, \lambda\Delta_{k+1}).$$

4 Длина минимального дерева Штейнера

Пусть X — произвольное метрическое пространство и $M \subset X$ — некоторое его n-точечное подмножество. Напомним, что через $\mathcal{M}(M,X) \subset \mathcal{M}$ мы обозначили множество классов изометрии подмножеств $V \subset X$ таких, что $M \subset V$ и $\#V \le 2n-2$. Выберем некоторое число d и положим $\mathcal{M}(M,X,d) = \{V \in \mathcal{M}(M,X) : \operatorname{diam} V \le d\}$.

Из следствия 3.5 и предложения 1.4 непосредственно выводится следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть M — конечное подмножество метрического пространства X и $n = \#M$. Выберем произвольное $d > \operatorname{smt}(M)$, например, $d > (n-1)\operatorname{diam} M$, и произвольное $\lambda \ge 2d$, тогда*

$$\operatorname{smt}(M,X) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\big[\lambda - 2d_{GH}(V,\lambda\Delta_{k+1})\big] : V \in \mathcal{M}(M,X,d)\Big\}.$$

5 Длина минимального заполнения

Пусть M — произвольное n-точечное метрическое пространство. Напомним, что через $\mathcal{M}(M) \subset \mathcal{M}$ мы обозначили множество классов изометрии метрических пространств V таких, что $M \subset V$ и $\#V \le 2n-2$. Выберем некоторое число d и положим $\mathcal{M}(M,d) = \{V \in \mathcal{M}(M) : \operatorname{diam} V \le d\}$.

Из следствия 3.5 и предложения 1.5 непосредственно выводится следующий результат.

Следствие 5.1. *Пусть M — конечное метрическое пространство и $n = \#M$. Выберем произвольное $d > \operatorname{mf}(M)$, например, $d > (n-1)\operatorname{diam} M$, и произвольное $\lambda \ge 2d$, тогда*

$$\operatorname{mf}(M) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\big[\lambda - 2d_{GH}(V,\lambda\Delta_{k+1})\big] : V \in \mathcal{M}(M,d)\Big\}.$$

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[4] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[5] Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. *The Steiner Tree Problem.* Annals of Discrete Mathematics 53, North-Holland: Elsevier, 1992. ISBN 0-444-89098-X.

[6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65-118.

[7] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.