Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств

Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А.

2 апреля 2016 г.

Аннотация

Показано, что каждое конечное семейство конечных метрических пространств, рассматриваемое как подмножество пространства метрических компактов, наделенного метрикой Громова–Хаусдорфа, соединяется некоторым минимальным деревом Штейнера.

Библиография: 6 названий.

1 Введение

Настоящая статья посвящена проблеме Штейнера в пространстве метрических компактов, наделенном метрикой Громова–Хаусдорфа. Показано, что если граничное множество состоит только из конечных метрических пространств, то оно соединяется некоторым минимальным деревом Штейнера. В случае общих метрических компактов авторами была решена проблема Штейнера только для двухточечных границ [1], где она равносильна существованию кратчайших кривых, соединяющих произвольную пару точек пространства. Для большего числа граничных точек попытки применить предельный переход с использованием критерия Громова о предкомпактности к успеху не привели. Однако мы надеемся, что разработанная техника поможет или доказать теорему существования и в общем случае, или построить контр-пример.

2 Основные определения и результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками x, $y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X. Для A, $B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A,B)=\max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|,\,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\bigr\}.$$

Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Отметим, что $d_H(A,B)$ может равняться бесконечности (например, когда $X = A = \mathbb{R}$ и $B = \{0\} \subset \mathbb{R}$), а также равняться нулю на неравных A и B (например, когда $X = \mathbb{R}$, $A = [a,b]$ и $B = [a,b)$).

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2.1 ([2]). *Ограничение d_H на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{r : \exists (X', Y', Z),\, d_H(X', Y') \le r\bigr\}.$$

Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа между X и Y*.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 2.2 ([2]). *Ограничение d_{GH} на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова–Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X,Y)$ называются *отношениями* между X и Y. Если $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$ — непустые подмножества, а $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, то положим

$$\sigma|_{X' \times Y'} = \bigl\{(x,y) \in \sigma : x \in X',\, y \in Y'\bigr\}.$$

Отметим, что $\sigma|_{X' \times Y'}$ может оказаться пустым и, тем самым, не принадлежащим $\mathcal{P}(X', Y')$.

Пусть $\pi_X : (x,y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x,y) \mapsto y$ — канонические проекции. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ определено его *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x,y),\, (x',y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Предложение 2.3 ([2]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Для метрического пространства X через $\operatorname{diam} X$ обозначим его *диаметр*: $\operatorname{diam} X = \sup\bigl\{|xy| : x,\, y \in X\bigr\}$.

Следствие 2.4 ([2])**.** *Для любых метрических пространств X и Y таких, что диаметр по крайней мере одного из них конечен, имеем*

$$d_{GH}(X,Y) \ge \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|.$$

Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

Предложение 2.5 ([3], [4], [5])**.** *Для X, $Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \ne \emptyset$.*

Пусть $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$ состоит из всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек; $\mathcal{M}(d) \subset \mathcal{M}$ — из всех пространств, диаметры которых не больше d; положим $\mathcal{M}_n(d) = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}(d)$.

Предложение 2.6 ([2])**.** *Пространство $\mathcal{M}_n(d)$ компактно.*

Напомним, что *простым графом* называется пара (V,E), состоящая из конечного множества V и некоторого множества E двухэлементных подмножеств V. Для удобства, вместо $\{v,w\}$ будем писать vw. Терминологию теории графов см. например в [6]. Мы рассматриваем только простые графы, поэтому слово "простой" будем опускать.

Пусть X — произвольное множество и $G = (V,E)$ — граф, для которого $V \subset X$. В этом случае будем говорить, что G — *граф на множестве* X. Пусть $M \subset X$ — произвольное конечное подмножество, и $G = (V,E)$ — **связный** граф на X, у которого $V \supset M$. Про такой граф будем говорить, что он *соединяет* M; при этом вершины из M будем называть *граничными*, а вершины из $V \setminus M$ — *внутренними*.

Пусть $G = (V,E)$ — граф на метрическом пространстве X. Для ребра $e = vw \in E$ его *длина* $|e|$ определяется как расстояние $|vw|$ между его вершинами. *Длина* $|G|$ *графа* G — сумма длин всех ребер графа G.

Для каждого конечного подмножества M метрического пространства X число

$$\operatorname{smt}(M,X) = \inf\bigl\{|G| : G \text{ — граф на } X, \text{ соединяющий } M\bigr\}$$

называется *длиной минимального дерева Штейнера на* M.

Следующий результат очевиден.

Предложение 2.7. *Для каждого конечного подмножества M метрического пространства X имеем*

$$\operatorname{smt}(M,X) = \inf\bigl\{|G| : G \text{ — дерево на } X, \text{ соединяющее } M\bigr\}.$$

Множество всех графов G на X, соединяющих $M \subset X$ и таких, что $|G| = \operatorname{smt}(M,X)$, будем обозначать через $\operatorname{SMT}(M,X)$. Отметим, что $\operatorname{SMT}(M,X)$ может быть пустым. Если $\operatorname{SMT}(M,X) \ne \emptyset$, то каждый граф $G \in \operatorname{SMT}(M,X)$ не содержит циклов и называется *минимальным деревом Штейнера на* M.

Техника, разработанная в [7] для римановых многообразий, тривиальным образом обобщается и на ограниченно компактные метрические пространства.

Предложение 2.8. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для каждого непустого конечного $M \subset X$ имеем* $\mathrm{SMT}(M, X) \neq \emptyset$.

Следующий результат вытекает из 2.6 и 2.8.

Следствие 2.9. *Для любого непустого конечного множества $M \subset \mathcal{M}_n(d)$ имеем* $\mathrm{SMT}\big(M, \mathcal{M}_n(d)\big) \neq \emptyset$.

Приводимая ниже теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 2.1. *Для каждого $M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset \mathcal{M}_n$ выполняется*

$$\mathrm{SMT}(M, \mathcal{M}) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Положим $r = \mathrm{smt}(M, \mathcal{M})$, и пусть $\mathcal{T}(M)$ состоит из всех деревьев G на $\mathcal{M}$, соединяющих M и таких, что $|G| \leq r+1$. По определению smt и в силу 2.7, имеем $\mathcal{T}(M) \neq \emptyset$ и

$$\mathrm{smt}(M, \mathcal{M}) = \inf\big\{|G| : G \in \mathcal{T}(M)\big\}.$$

Выберем произвольный граф $G = (V, E) \in \mathcal{T}(M)$.

Лемма 2.10. *Положим $d = \max_i\{\operatorname{diam} m_i\}$ и $\widehat{d} = 2r + d + 2$, тогда $V \subset \mathcal{M}(\widehat{d})$.*

Доказательство. Если существует $v \in V$, диаметр которого больше $\widehat{d}$, то, в силу 2.4, имеем

$$|G| \geq d_{GH}(v, m_1) \geq \frac{1}{2}|\operatorname{diam} v - \operatorname{diam} m_1| > \frac{1}{2}(2r + d + 2 - d) = r + 1,$$

противоречие. □

Конструкция 2.11. Для каждого $e = vw \in E$ выберем некоторое $R_e \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(v, w)$, существующее в силу 2.5. Легко видеть, что для каждого $x \in \sqcup_i m_i$ существует дерево $T_x = (P_x, F_x)$ такое, что P_x получено из V выбором в каждом компакте $v \in V$ по одной точке p_v, причем так, что для каждого $vw \in E$ выполняется $p_v p_w \in R_e$, а множество ребер F_x дерева T_x состоит в точности из всех таких пар $p_v p_w$. Таким образом, отображение $v \mapsto p_v$ является изоморфизмом графов G и T_x. Дерево T_x назовем *нитью, выпущенной из x*.

Пусть $m = \sqcup_{i=1}^k m_k$ и N — число точек в m. Выберем для каждого $x \in m$ некоторую нить T_x. Для каждого $v \in V$ определим $v' \subset v$ следующим образом:

$$v' = \{y \in v : \exists x \in m,\ y \in P_x\}.$$

Если $e = vw$, то положим $e' = v'w'$. Отметим, что для каждого $v \in V$ имеем $v' \in \mathcal{M}_N$.

Пусть $V' = \{v'\}_{v\in V}$. Через $G' = (V', E')$ обозначим граф, в котором $v'w' \in E'$ тогда и только тогда, когда $vw \in E$. В силу сказанного выше, G' — граф на $\mathcal{M}_N$. Ясно также, что отображение $v \mapsto v'$ является изоморфизмом графов G и G'.

Следующее свойство выбранных $v' \subset v$ мгновенно вытекает из построения.

Лемма 2.12. *Для любого $e = vw \in E$ имеем $R_{e'} := R_e|_{v'\times w'} \in \mathcal{R}(v', w')$ и $\operatorname{dis} R_{e'} \le \operatorname{dis} R_e$. В частности, $|e'| \le |e|$, откуда $|G'| \le |G|$ и, значит, $G' \in \mathcal{T}(M)$.*

Применим 2.10 и 2.12.

Следствие 2.13. *Построенное выше $G' \in \mathcal{T}(M)$ является деревом на $\mathcal{M}_N(\widehat{d})$ и, значит,*

$$\operatorname{smt}(M, \mathcal{M}) = \operatorname{smt}(M, \mathcal{M}_N(\widehat{d})).$$

Осталось применить 2.9. $\square$

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[4] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.

[5] `http://mathoverflow.net/questions/135184/for-which-metric-spaces-is-gromov-hausdorff-distance-actually-achieved?rq=1`

[6] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[7] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.