Локальное устройство пространства Громова–Хаусдорфа и изометричные вложения конечных метрических пространств в это пространство

А.О.Иванов, С.Илиадис, А.А.Тужилин

24 апреля 2016 г.

Аннотация

Изучается геометрия семейства $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа. Показано, что малые окрестности пространств общего положения, рассматриваемые в подпространстве всех конечных метрических пространств с заданным числом точек, изометричны соответствующим окрестностям точек некоторого пространства $\mathbb{R}^N_\infty$, т.е. пространства $\mathbb{R}^N$ с нормой $\|(x_1,\ldots,x_N)\| = \max_i |x_i|$. В качестве следствия доказано, что каждое конечное метрическое пространство изометрично вкладывается в $\mathcal{M}$, причем его образ лежит в подпространстве, составленном из всех конечных метрических пространств с заданным числом k точек. Если исходное пространство имеет n точек, то в качестве k можно взять наименьшее натуральное число, для которого $n \le k(k-1)/2$.

Библиография: 6 названий.

1 Введение

Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с метрикой Громова–Хаусдорфа. Известен ряд свойств пространства $\mathcal{M}$, например, что оно — линейно связное, полное, сепарабельное, но не ограниченно компактное. Недавно А.О.Иванов, Н.К.Николаева и А.А.Тужилин показали, что метрика Громова–Хаусдорфа является строго внутренней [1]. До сих пор имеется еще много разных вопросов, связанных с этим пространством. С.Илиадис сформулировал следующую задачу: *выяснить, является ли $\mathcal{M}$ универсальным для семейства метрических компактов*. Последнее можно понимать в слабом и сильном смыслах. В слабом смысле это означает, что любой метрический компакт может быть изометрично вложен в $\mathcal{M}$. В сильном смысле это значит, что каждое изометричное вложение подпространства метрического компакта продолжается до изометричного вложения всего компакта. Легко понять, что в сильном смысле пространство $\mathcal{M}$ универсальным не является (см. ниже). Что касается универсальности в слабом смысле, в настоящей работе мы покажем следующее: *каждое конечное метрическое пространство изометрично вкладывается в $\mathcal{M}$*. При этом мы построим такое вложение, что его образ будет лежать в семействе конечных метрических пространств с заданным числом точек k, и если исходное пространство имело n точек, то в качестве k мы возьмем наименьшее натуральное число, для которого $n \le k(k-1)/2$.

Построение такого изометричного вложения основано на изученной нами геометрии семейства всех конечных метрических пространств с заданным числом точек в малых окрестностях пространств общего положения. А именно, мы показываем, что такие окрестности изометричны соответствующим окрестностям точек некоторого пространства $\mathbb{R}^k_\infty$, т.е. пространства $\mathbb{R}^k$ с нормой $\big\|(x_1,\ldots,x_k)\big\| = \max_i |x_i|$.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждой точки $x\in X$ и числа $r>0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A\subset X$ и числа $r>0$ положим $U_r(A)=\cup_{a\in A}U_r(a)$.

Для непустых A, $B\subset X$ положим

$$d_H(A,B)=\inf\bigl\{r>0: A\subset U_r(B)\&B\subset U_r(A)\bigr\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X',Y',Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). *Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ Громова–Хаусдорфа между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X',Y',Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X',Y')\le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Если $\pi_X\colon X\times Y\to X$ и $\pi_Y\colon X\times Y\to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x,y)=x$ и $\pi_Y(x,y)=y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x\in X$ определен его образ $\sigma(x)=\{y\in Y\mid (x,y)\in\sigma\}$; для каждого $A\subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов всех элементов из A; для каждого $y\in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y)=\{x\in X\mid (x,y)\in\sigma\}$; для каждого $B\subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов всех его элементов.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничения канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого отношения $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ определено его *искажение* $\operatorname{dis}\sigma$:

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|: (x,y)\in\sigma,\ (x',y')\in\sigma\Bigr\}.$$

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 2.1 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R \mid R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X,Y)$ конечно, поэтому существует $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, для которого $d_{GH}(X,Y)=\frac12\operatorname{dis}R$. Каждое такое соответствие R назовем *оптимальным*. Отметим, что оптимальные соответствия существуют и для любых метрических компактов X и Y, см. [3]. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

Для произвольных непустых множеств X и Y соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *неприводимым*, если оно представляет собой минимальный элемент множества $\mathcal{R}(X,Y)$ по отношению к порядку, заданному включением. Множество всех непустых неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

Следующее предложение описывает устройство неприводимых соответствий.

Предложение 2.2. *Каждое неприводимое соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ порождает разложения $X=X_1'\sqcup X_1''\sqcup X_2$ и $Y=Y_1'\sqcup Y_1''\sqcup Y_2$, а также разбиения $\widehat{X}_1'$ и $\widehat{Y}_1'$ множеств X_1' и Y_1' соответственно. При этом R индуцирует биекцию $\widehat{R}$ между множествами $\widehat{X}=\widehat{X}_1'\sqcup X_1''\sqcup X_2$ и $\widehat{Y}=Y_2\sqcup Y_1''\sqcup\widehat{Y}_1'$ такую, что $(x,y)\in R$, если и только если или $x\in\hat x\in\widehat{X}_1'$, $y=\widehat{R}(\hat x)\in Y_2$, или $x\in X_1''$, $y=\widehat{R}(y)\in Y_1''$, или $x\in X_2$, $y\in\hat y=\widehat{R}(x)\in\widehat{Y}_1'$.*

Рисунок 1 иллюстрирует эту теорему.

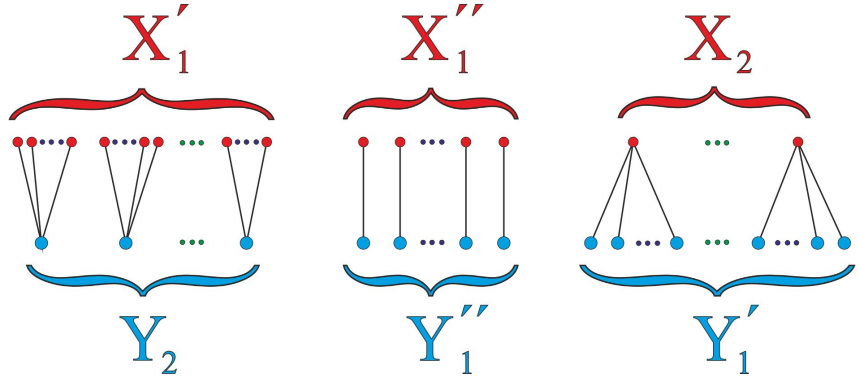

Рис. 1: Структура неприводимого соответствия.

Полезность неприводимых соответствий для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа обосновывается следующими результатами [4].

Предложение 2.3. *Для каждого $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ существует $R^0\in\mathcal{R}^0(X,Y)$ такое, что $R^0\subset R$.*

Пусть теперь X и Y — метрические пространства. Положим $\mathcal{R}^0_{\rm opt}(X,Y)=\mathcal{R}^0(X,Y)\cap\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

Следствие 2.4. *Для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}^0_{\rm opt}(X,Y)\neq\emptyset$.*

Если X — метрическое пространство, то через $\operatorname{diam} X$ обозначим его диаметр, т.е. величину $\sup\bigl\{|xx'| : x, x' \in X\bigr\}$. Следующие утверждение также хорошо известно [2].

Предложение 2.5.

(1) *Если Δ_1 обозначает одноточечное пространство, а X — произвольное метрическое пространство, то $d_{GH}(\Delta_1, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.*

(2) *Для любых метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X,\, \operatorname{diam} Y\}.$$

3 Неуниверсальность пространства Громова–Хаусдорфа в сильном смысле

В данном разделе мы покажем, что двухточечное метрическое пространство $\{A,B\}$ с расстоянием $|AB| = 1/2$ можно так изометрично вложить в $\mathcal{M}$, что это вложение нельзя продолжить до изометричного вложения трехточечного метрического пространства $\{A,B,C\}$ с расстояниями $|AC| = 1/2$ и $|BC| = 2/3$. Этот пример демонстрирует, что пространство $\mathcal{M}$ не является универсальным с сильном смысле.

Действительно, переведем A в одноточечное пространство Δ_1, а B — в двухточечное пространство Δ_2, в котором расстояние между точками равно 1. Тогда, в силу 2.5 (1), $d_{GH}(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}\Delta_2 = 1/2$, так что мы изометрично вложили $\{A,B\}$ в $\mathcal{M}$.

Пусть теперь C переходит в некоторую точку $X \in \mathcal{M}$ так, что $|AC| = d_{GH}(\Delta_1, X)$. По 2.5 (1), $|AC| = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X = 1/2$, откуда $\operatorname{diam} X = 1$. Но по 2.5 (2),

$$d_{GH}(\Delta_2, X) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}\Delta_2,\, \operatorname{diam} X\} = 1/2.$$

Таким образом, при любом выборе X его расстояние до Δ_2 нельзя сделать равным $2/3$.

4 Геометрия пространства Громова–Хаусдорфа в окрестности метрических пространств общего положения

Обозначим через $\mathcal{M}_n$ подмножество в $\mathcal{M}$, составленное из всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек, а через $\mathcal{M}_{[n]}$ — подмножество $\mathcal{M}_n$, составленное из n-точечных метрических пространств.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим отображение $\nu\colon \mathcal{M}_{[n]} \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$ следующим образом. Для $X = \{x_1,\dots,x_n\} \in \mathcal{M}_{[n]}$ рассмотрим все расстояния $|x_ix_j|$ между различными точками, упорядочим их по возрастанию, и полученный вектор из $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, деленный на 2, обозначим через $\nu(X)$. Через $\nu^i(X)$ будем обозначать i-ую координату вектора $\nu(X)$.

Будем говорить, что X и Y из $\mathcal{M}_{[n]}$ *структурно изоморфны*, если существует биекция $f\colon X \to Y$, сохраняющая порядок на множестве всех расстояний: $|xy| \le |zw|$ тогда и только тогда, когда $|f(x)f(y)| \le |f(z)f(w)|$. Каждое такое f будем называть *структурным изоморфизмом*. Заметим, что для структурного изоморфизма $f\colon X \to Y$ и каждого $1 \le i \le n(n-1)/2$, если $\nu^i(X)=|xx'|/2$, то $\nu^i(Y)=\bigl|f(x)f(x')\bigr|/2$. Иными словами, одинаковые координаты векторов $\nu(X)$ и $\nu(Y)$ равны половинам расстояний между парами точек из X и Y, соответствующими друг другу с помощью структурного изоморфизма f. Поэтому рассматривая f как соответствие между X и Y, т.е. $f\in\mathcal{R}(X,Y)$, получаем, что $|\nu(X)\nu(Y)|=\frac12\operatorname{dis}f$.

Обозначим через $\mathcal{M}'_{[n]}$ подмножество $\mathcal{M}_{[n]}$, составленное из всех пространств, в которых все ненулевые расстояния различны. Тогда если $X,Y\in\mathcal{M}'_{[n]}$ структурно изоморфны, то структурный изоморфизм между ними определен однозначно. Более того, структурная изоморфность является отношением эквивалентности на $\mathcal{M}'_{[n]}$, поэтому $\mathcal{M}'_{[n]}$ разбивается на *классы структурной изоморфности*. Отметим также следующее очевидное свойство: для любых структурно изоморфных $X,Y\in\mathcal{M}'_{[n]}$ пространство $Z\in\mathcal{M}_{[n]}$ структурно изоморфно X, если и только если оно структурно изоморфно Y. Последнее обосновывает корректную определенность *замыкания класса структурной изоморфности* как семейства всех $Z\in\mathcal{M}_{[n]}$, которые структурно изоморфны некоторому $X\in\mathcal{M}'_{[n]}$ (это определение не зависит от выбора представителя). Таким образом, все пространство $\mathcal{M}_{[n]}$ покрывается замыканиями классов структурной изоморфности, при этом любые два пространства из такого замыкания структурно изоморфны. Несложно показать, что эти замыкания могут быть определены как максимальные подсемейства в $\mathcal{M}_{[n]}$, в которых любые два элемента структурно изоморфны.

Следующее предложение в настоящей статье нам не понадобится.

Предложение 4.1. *Пусть $C\subset\mathcal{M}_{[n]}$ — замыкание некоторого класса структурной эквивалентности. Тогда отображение $\nu\colon C\to\mathbb{R}_\infty^{n(n-1)/2}$ — несжимающее.*

Доказательство. Выберем произвольные $X,Y\in C$ и пусть $R\colon X\to Y$ — структурный изоморфизм. Тогда $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, поэтому

$$d_{GH}(X,Y)\le\frac12\operatorname{dis}R=|\nu(X)\nu(Y)|,$$

что и требовалось. □

Под *пространством общего положения* будем понимать такое конечное метрическое пространство, что все его ненулевые расстояния попарно различны, и все его неравенства треугольника строгие. Семейство всех пространств общего положения обозначим через $\mathcal{M}^{\rm gen}$. Ясно, что $\mathcal{M}^{\rm gen}$ всюду плотно в $\mathcal{M}$. Положим также $\mathcal{M}^{\rm gen}_{[n]}=\mathcal{M}_{[n]}\cap\mathcal{M}^{\rm gen}$. По определению, $\mathcal{M}^{\rm gen}_{[n]}\subset\mathcal{M}'_{[n]}$, таким образом, $\mathcal{M}^{\rm gen}_{[n]}$ также разбивается на классы структурной изоморфности.

Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}\in\mathcal{M}$, $n\ge3$. Положим $\delta(X)$ равным наименьшему из следующих двух чисел:

$$\min\bigl\{|x_ix_j|+|x_jx_k|-|x_ix_k|:\#\{i,j,k\}=3\bigr\},$$
$$\min\Bigl\{\bigl||x_ix_j|-|x_px_q|\bigr|:\#\{i,j,p,q\}\ge3\Bigr\}.$$

Для $n=2$ пусть $\delta(X)=|x_1x_2|$.

Замечание 4.2. Если в определении второго минимума положить $p=q$, то получим $|x_ix_j|$. Таким образом, $\delta(X)\le|x_ix_j|$ при всех $i\ne j$. Для $n=2$ это свойство также имеет место.

Легко видеть, что $X\in\mathcal{M}^{\rm gen}$, если и только если $\delta(X)>0$. Кроме того, для любого $Y=\{y_1,\dots,y_n\}\in\mathcal{M}$ такого, что $\bigl||x_ix_j|-|y_iy_j|\bigr|<\delta(X)/3$ при всех $1\le i,\,j\le n$, имеем $Y\in\mathcal{M}^{\rm gen}$, а X и Y — структурно изоморфны, причем отображение $x_i\mapsto y_i$ является структурным изоморфизмом.

Теорема 4.1. *Пусть $X=\{x_1,\ldots,x_n\}\in\mathcal{M}^{\rm gen}$. Положим $\delta=\delta(X)/6$, $U=U_\delta(X)\subset\mathcal{M}_n$, $N=n(n-1)/2$, $V=U_\delta\big(\nu(X)\big)\subset\mathbb{R}^N_\infty$. Тогда отображение $\nu|_U\colon U\to V$ — изометрия.*

Доказательство. Выберем произвольное $Y\in U$. Покажем, что $\#Y=n$. Действительно, если $\#Y<n$, то для любого $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ существует $y\in Y$ такое, что для некоторых несовпадающих $x_1,x_2\in X$ имеем (x_1,y), $(x_2,y)\in R$, откуда $\operatorname{dis}R\ge|x_1x_2|\ge\delta(X)=6\delta$. Но тогда $d_{GH}(X,Y)\ge3\delta$, противоречие.

Итак, $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$. Выберем произвольное $R\in\mathcal{R}^0_{\rm opt}(X,Y)$. Если R не является биекцией, то применимы рассуждения, проделанные только что, и мы получаем противоречие. Таким образом, R — биекция. Перенумеровав, если необходимо, элементы Y, без ограничения общности будем считать, что $y_i=R(x_i)$ при всех $1\le i\le n$. Покажем, что R — структурный изоморфизм. Для этого заметим, что для любых $1\le i,\,j\le n$ выполняется

$$\big||y_iy_j|-|x_ix_j|\big|\le\operatorname{dis}R=2d_{GH}(X,Y)<2\delta=\delta(X)/3,$$

поэтому если $0<|x_ix_j|<|x_px_q|$, то так как $|x_px_q|-|x_ix_j|\ge\delta(X)$, имеем $|y_py_q|-|y_iy_j|>\delta(X)/3>0$.

Следовательно, $|\nu(X)\nu(Y)|=\frac12\operatorname{dis}R=d_{GH}(X,Y)$, поэтому отображение ν изометрично.

Нам осталось показать, что ν сюръективно. Выберем произвольное $Z=(\rho_{12},\ldots,\rho_{(n-1)n})\in V$ и для каждых $1\le i<j\le n$ положим $\rho_{ji}=\rho_{ij}$. Так как $Z\in U_\delta\big(\nu(X)\big)$, имеем $\big|\rho_{ij}-|x_ix_j|/2\big|<\delta$ при всех неравных $1\le i,\,j\le n$. Выберем произвольные попарно различные $1\le i,\,j,\,k\le n$, тогда

$$\rho_{ij}+\rho_{jk}-\rho_{ik}>\frac12\big(|x_ix_j|+|x_jx_k|-|x_ix_k|\big)-3\delta\ge\delta(X)/2-\delta(X)/2=0;$$

кроме того, $\rho_{ij}>|x_ix_j|/2-\delta\ge\delta(X)/2-\delta(X)/6>0$. Таким образом, числа $2\rho_{ij}$ задают на множестве $\{y_1,\ldots,y_n\}$ метрику: $|y_iy_j|=2\rho_{ij}$. Обозначим через Y полученное метрическое пространство, а через $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ — биекцию $x_i\mapsto y_i$. Тогда

$$d_{GH}(X,Y)\le\frac12\operatorname{dis}R=\frac12\max\Big\{\big||y_iy_j|-|x_ix_j|\big|\Big\}=\max\Big\{\big|\rho_{ij}-|x_ix_j|/2\big|\Big\}<\delta,$$

так что $Y\in U_\delta(X)=U$. Осталось заметить, что $\nu(Y)=Z$. □

5 Изометрическое вложение конечного метрического пространства в $\mathcal{M}$

В данном разделе мы докажем следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть X — произвольное конечное метрическое пространство, состоящее из n точек. Обозначим через k наименьшее натуральное число, для которого $n\le k(k-1)/2$. Тогда X изометрично вкладывается в $\mathcal{M}$, причем образ X лежит в $\mathcal{M}_{[k]}$.*

Доказательство. Положим $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Пусть сначала $n=k(k-1)/2$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$.

Обозначим через $f\colon X\to\mathbb{R}^n_\infty$ изометричное вложение Куратовского [5], которое, напомним, задается так:

$$f\colon x_i\mapsto\big(|x_1x_i|,\ldots,|x_nx_i|\big).$$

Отметим также, что сдвиги в $\mathbb{R}^n_\infty$ являются изометриями.

Пусть d обозначает диаметр X. Рассмотрим метрическое пространство $S \in \mathcal{M}_{[k]}$ общего положения, в котором $\delta(S)/6 > d$. Положим $\delta = \delta(S)/6$, тогда $Z = \nu(S) + f(X) \subset U_\delta\big(\nu(S)\big) \subset \mathbb{R}^n_\infty$. Как было отмечено выше, пространство Z с индуцированной из $\mathbb{R}^n_\infty$ метрикой изометрично X.

Положим $U = U_\delta(S) \subset \mathcal{M}_{[k]}$ и $V = U_\delta(\nu(S)) \subset \mathbb{R}^n_\infty$, тогда, по теореме 4.1, $\nu|_U \colon U \to V$ — изометрия. Следовательно, $\nu^{-1}(Z) \subset \mathcal{M}_{[k]} \subset \mathcal{M}$ — подмножество, изометричное X.

Пусть теперь $n \ne k(k-1)/2$ ни для какого $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим наименьшее k, для которого $n < k(k-1)/2$. Расширим X до метрического пространства Y, состоящего из $k(k-1)/2$ точек, сохранив неизменными все расстояния между точками из X и положив все остальные расстояния равными диаметру d пространства X (легко проверяется, что Y — действительно метрическое пространство). В силу предыдущих рассуждений, Y изометрично некоторому подмножеству в $\mathcal{M}_{[k]}$, поэтому X изометрично соответствующей части этого подмножества. $\square$

Список литературы

[1] Ivanov A. O., Nikolaeva N. K., Tuzhilin A. A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* arXiv:1504.03830, 2015.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[4] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116, 2016.

[5] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65-118.