В. А. ЗОРИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(Вводная лекция для первого курса)

Содержание

Два слова о математике.

Математика — наука абстрактная. Например, она учит сложению, не спрашивая, считаем ли мы ворон, капитал или что-то ещё. Поэтому математика одна из самых универсальных и общеупотребительных прикладных наук. В ней как науке, конечно, есть и ещё кое-что, почему к математике обычно относятся с уважением: она учит слышать аргумент и ценить истину.

Число, функция, закон.

К чудесам люди привыкают быстро и «Не может быть???» вскоре незаметно превращается в «Не может быть иначе!!!».

Мы уже настолько свыклись с тем, что $2 + 3 = 5$, что не видим тут никакого чуда. А ведь тут не сказано, что два яблока и ещё три яблока будет пять яблок, а сказано, что это так и для яблок, и для слонов, и для всего прочего. Это мы уже отметили.

Потом мы свыкаемся с тем, что $a + b = b + a$, где теперь уже символы a и b могут означать и 2, и 3, и любые целые числа.

Функция, или функциональная зависимость, — это очередное математическое чудо. Оно сравнительно молодо: ему, как научному понятию, всего три с небольшим сотни лет, хотя в природе и даже в быту мы с ним сталкиваемся никак не реже, чем со слонами или даже с теми же яблоками.

Каждая наука или область человеческой деятельности относится к какой-то конкретной сфере объектов и их взаимосвязей. Эти связи, зависимости, законы математика описывает и изучает в отвлеченном и потому общеполезном виде, объединяя их термином *функция* или *функциональная зависимость* $y = f(x)$ *состояния* (значения) *одной величины* (y) *от состояния* (значения) *другой* (x).

Особенно важно то, что теперь уже речь не о постоянных, а о переменных величинах x и y, связанных законом f. Функция приспособлена к описанию развивающихся процессов и явлений, к описанию характера изменения их состояний и вообще к описанию зависимостей переменных величин.

Иногда закон f связи известен (дан) (например, государством или технологическим процессом) и тогда в условиях действия закона f мы, например, часто стараемся так выбрать стратегию, т.е.

состояние (значение) доступной нашему выбору независимой переменной x, чтобы получить наиболее благоприятное для нас в том или ином отношении состояние (значение) нужной нам величины y (учитывая, что $y = f(x)$).

В других случаях (и это даже интереснее) ищется сам закон природы f, связывающий явления. И хотя это дело конкретных наук, математика и здесь бывает удивительно полезна потому, что часто по казалось бы очень малой исходной конкретной информации, которой располагают те или иные профессионалы, она, подобно Шерлоку Холмсу, способна сама дальше найти закон f (решая или исследуя некоторые новые, так называемые *дифференциальные уравнения*, которых не было у древних математиков и которые возникли с появлением дифференциального и интегрального исчисления на рубеже XVII-XVIII веков усилиями Ньютона, Лейбница, их предшественников и последователей).

Итак, открываем букварь современной математики.

Математическая модель явления.
(Дифференциальное уравнение или учимся писать.)

Одним из наиболее ярких и долго сохраняющихся впечатлений от школьной математики, конечно, является маленькое чудо, когда что-то вам неизвестное вы заколдовываете буквой x или там буквами x, y, потом пишете что-то вроде а $\cdot\, x = b$ или какую-нибудь систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1, \\ x & - & y & = & 2, \end{array}\right.$$

после чего парой математических заклинаний открываете то, что было неизвестно: $x = 1,\ y = -1$.

Давайте попробуем научиться хотя бы писать уравнения в новой ситуации, когда нам надо найти не какое-то одно число, а неизвестный нам закон связи важных для нас переменных величин, т.е. когда мы ищем нужную функцию. Рассмотрим некоторые примеры.

Для определенности мы сначала будем говорить о биологии (размножении микроорганизмов, росте биомассы, экологических ограничениях и т.п.), но будет ясно, что при желании все это можно перенести в другие сферы и говорить о росте капитала, ядерной реакции, атмосферном давлении и так далее, и тому подобное.

Для разминки полушуточный вопрос:

Простейший организм, который ежесекундно размножается делением пополам (удвоением), положили в пустой стакан. Через одну минуту стакан наполнился. За какое время наполнится пустой стакан, если в него положить не один, а два этих простейших организма?

Теперь ближе к делу и обещанным примерам.

1. Известно, что в благоприятных условиях скорость размножения микроорганизмов, т.е. скорость роста биомассы, пропорциональна (с некоторым коэффициентом пропорциональности k) наличному количеству биомассы. Надо найти закон $x = x(t)$ изменения биомассы во времени, если известно её начальное состояние $x(0) = x_0$.

По нашим представлениям, знай мы сам закон $x = x(t)$ изменения величины x, мы бы знали и скорость ее изменения в любой момент времени t. Не вдаваясь пока в обсуждение того, как именно по $x(t)$ находить эту скорость, обозначим её через $x'(t)$. Поскольку функция $x' = x'(t)$ порождается функцией $x = x(t)$, её в математике называют *производной* от функции $x = x(t)$. (Как находить производную функции и многому другому учит дифференциальное исчисление. Оно впереди.)

Теперь можно коротко записать, что нам дано:

$$x'(t) = k \cdot x(t) \ , \tag{1}$$

причем $x(0) = x_0$. Хотим же мы найти саму зависимость $x = x(t)$.

Мы написали первое *дифференциальное уравнение* (1). Вообще, дифференциальными называют уравнения, содержащие производные (некоторые оговорки и уточнения здесь пока неуместны). Кстати, для упрощения текста в записи уравнения независимую переменную часто опускают. Например, уравнение (1) пишут в виде $x' = k \cdot x$. Если бы искомая функция была обозначена буквой f или u, то то же уравнение имело бы вид $f' = k \cdot f$ или $u' = k \cdot u$ соответственно.

Уже сейчас ясно, что если мы научимся не только писать, но и решать или исследовать дифференциальные уравнения, то мы сможем многое узнать и предвидеть. Именно поэтому сакраментальная фраза Ньютона, относившаяся к новому исчислению, звучала примерно так: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Упражнение. Свяжите написанное уравнение с рассмотренным примером размножения в стакане. Каковы тут коэффициент k, начальное условие $x(0) = x_0$ и сама зависимость $x = x(t)$?

Попробуем по горячим следам записать уравнением ещё несколько конкретных вопросов.

2. Допустим теперь, как это всегда и случается, что еды не бесконечно много и среда может прокормить не более чем M особей или биомассу, не превышающую значения M. Тогда, надо полагать, скорость роста биомассы будет уменьшаться, например, пропорционально остающимся возможностям среды. За меру остающихся возможностей можно взять разность $M - x(t)$ или лучше взять безразмерную величину $1 - \frac{x(t)}{M}$. Этой ситуации вместо уравнения (1), очевидно, отвечает уравнение

$$x' = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{M}\right), \tag{2}$$

которое переходит в (1) на стадии, когда $x(t)$ ещё много меньше M. Наоборот, когда $x(t)$ близко к M, скорость роста становится близкой к нулю, т.е. рост прекращается, что естественно. Как именно выглядит закон $x = x(t)$ в этом случае, мы найдем позже, овладев кое-какими навыками.

Упражнение. Тело, имевшее начальную температуру T_0, остывает в среде, имеющей постоянную температуру C. Пусть $T = T(t)$ закон изменения температуры тела во времени. Напишите уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, считая, что скорость остывания пропорциональна разности температур тела и среды.

Скорость $v(t)$ изменения величины $x(t)$ мы назвали производной функции $x = x(t)$ и обозначили $x'(t)$. Ускорение $a(t)$, как известно, это скорость изменения скорости $v(t)$. Значит $a(t) = v'(t) = (x')'(t)$, т.е. по отношению к исходной функции это производная от её производной. Она называется второй производной исходной функции и часто обозначается как $x''(t)$. (Другие обозначения появятся позже.) Если мы умеем находить первую производную, то, повторяя процедуру, можно определить производную $x^{(n)}(t)$ любого порядка n от исходной функции $x = x(t)$.

3. Пусть, например, $x = x(t)$ — закон движения точки массы m, т.е. координаты положения точки как функции времени. Для простоты будем считать, что движение происходит вдоль прямой (горизонтальной или вертикальной), тогда координата только одна.

Классический закон Ньютона $m \cdot a = F$, связывающий силу, действующую на точку массы m, с вызванной этим действием ускорением точки, теперь можно записать в виде

$$m \cdot x''(t) = F(t) \tag{3}$$

или, сокращенно, $m \cdot x'' = F$.

Если действующая сила $F(t)$ известна, то соотношение $m \cdot x'' = F$ можно рассматривать как дифференциальное уравнение (второго порядка) относительно функции $x(t)$.

Например, если F — это сила тяжести у поверхности Земли, то $F = mg$, где g — ускорение свободного падения. В этом случае наше уравнение приобретает вид $x''(t) = g$. Как вы знаете, ещё Галилей нашёл, что в свободном падении $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$, где x_0 — начальное положение, а v_0 — начальная скорость точки.

Чтобы хотя бы проверить, что указанная функция удовлетворяет уравнению, уже надо уметь дифференцировать функцию, т.е. находить её производную. В нашем случае нужна даже вторая производная.

Чуть ниже мы приведем табличку некоторых функций и их производных. Вывод её будет сделан позже во время систематического изложения дифференциального исчисления. А сейчас попробуйте сами сделать следующее.

Упражнение. Напишите уравнение свободного падения в атмосфере. В этом случае возникает сила сопротивления. Считайте её пропорциональной первой (или второй) степени скорости движения. (Скорость свободного падения не растет до бесконечности именно ввиду присутствия силы сопротивления.)

Итак, надо бы научиться вычислять производные.

Скорость, производная, дифференцирование.

Рассмотрим сначала знакомую ситуацию, где мы можем обратиться к нашей интуиции (и сменим обозначение $x(t)$ на $s(t)$).

Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — её координата в момент t, а $v(t) = s'(t)$ — её скорость в тот же момент t. За промежуток времени h, прошедший после момента t, точка сместится в положение $s(t+h)$. По нашим представлениям о скорости, величина $s(t+h)-s(t)$ перемещения точки за малый промежуток времени h, прошедший после момента t, и её скорость $v(t)$ в момент t связаны соотношением

$$s(t+h) - s(t) \approx v(t) \cdot h \tag{4}$$

или, иначе, $v(t) \approx \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$, и это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени h, прошедший после момента t.

Значит, надо полагать,

$$v(t) := \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \ ,$$

т.е. мы определяем $v(t)$ как *предел* отношения приращения функции к приращению её аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Теперь нам ничего не стоит, копируя этот пример, дать общее определение значения $f'(x)$ *производной* f' *функции* f *в точке* x:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ , \tag{5}$$

т.е. $f'(x)$ есть предел отношения *приращения* $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ *функции* к *приращению* $\Delta x = (x+h) - x$ *её аргумента*, когда последнее стремится к нулю.

Соотношение (5) можно переписать в подобной (4) другой и, быть может, самой удобной и полезной форме:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \mathrm{o}(h) \ , \tag{6}$$

где o(h) — некоторая *величина* (поправка), *малая по сравнению с* h *при стремлении* h *к нулю.* (Последнее означает, что отношение o$(h)/h$ стремится к нулю при стремлении h к нулю.)

Проделаем несколько пробных расчетов.

1. Пусть f — постоянная, т.е. $f(x) \equiv c$.
Тогда, очевидно, $\Delta f = f(x+h) - f(x) \equiv 0$ и $f'(x) \equiv 0$, что естественно: скорость изменения равна нулю, если изменений нет.

2. Если $f(x) = x$, то $f(x+h) - f(x) = h$, поэтому $f'(x) \equiv 1$.
А если $f(x) = kx$, то $f(x+h) - f(x) = kh$ и $f'(x) \equiv k$.

3. Кстати, тут можно сделать два очевидных, но весьма полезных общих наблюдения: если функция f имеет своей производной f', то функция cf, где c — числовой множитель, имеет своей производной cf', т.е. $(cf)' = cf'$; в этом же смысле $(f+g)' = f' + g'$, т.е. производная суммы функций равна сумме их производных, если последние определены.

4. Пусть $f(x) = x^2$.
Тогда $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 = 2xh + \mathrm{o}(h)$, поэтому $f'(x) = 2x$.

5. Аналогично, если $f(x) = x^3$, то
$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = 3x^2h + \mathrm{o}(h)$, поэтому $f'(x) = 3x^2$.

6. Теперь понятно, что вообще, если $f(x) = x^n$, то поскольку
$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \mathrm{o}(h)$, имеем $f'(x) = nx^{n-1}$.

7. Значит, если имеем многочлен
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, то
$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$.

Пробное прощупывание определения производной сделали. Разрабатывать и осваивать технику и практику дифференцирования надо будет отдельно. А сейчас для примера и вашего сведения приведем небольшую табличку функций и их производных. Потом мы её получим, расширим и уточним.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\dots$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	$\dots$	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x	e^x	$\dots$	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dots$	$\sin(x + n\pi/2)$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\dots$	$\cos(x + n\pi/2)$
$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\dots$	?
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\dots$	?

Здесь e — число (e $= 2,7...$), такое же вездесущее в анализе, как π в геометрии. Логарифм по основанию e вместо $\log_e$ часто обозначают через ln, что и отражено во второй строчке таблицы. Использование логарифмов по этому основанию, называемых натуральными логарифмами, упрощает многие формулы (что, например, видно в третьей строчке таблицы).

Упражнение. Считая, что столбец f' правильный, проверьте столбец $f^{(n)}$ и дозаполните таблицу, сняв вопросы.

После этого вычислите в каждом случае значение $f^{(n)}(0)$.

Упражнение. Попробуйте найти производную функции $f(x) = e^{kx}$ и решение уравнения (1). Выясните, за какое время начальное состояние x_0 (капитала, биомассы или ещё чего-то, подчиняющегося этому уравнению) удвоится.

Высшие производные, зачем?

Замечательным и весьма полезным развитием центрального соотношения (6), которое можно переписать в виде

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \mathrm{o}(h)\ , \tag{7}$$

является следующая формула (формула Тейлора)

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + \mathrm{o}(h^n)\ . \tag{8}$$

Если положить здесь $x = 0$, а потом букву h заменить буквой x, то получим

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \mathrm{o}(x^n)\ . \tag{9}$$

Например, если $f(x) = (1+x)^\alpha$, то вслед за Ньютоном найдем, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)\ . \tag{10}$$

Иногда в формуле (9) можно продолжить суммирование до бесконечности, ликвидировав при этом поправочный член.

В частности,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... \tag{11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + ... + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + ... \tag{12}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + ... + (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + ... \tag{13}$$

Мы получили представление сравнительно сложных функций в виде суммы (бесконечной суммы — *ряда*) простейших функций, допускающих вычисления обычными действиями арифметики. Конечные куски этих сумм — полиномы. Они дают хорошие приближения раскладываемых в такой ряд функций.

Снова к числу.

Мы все время молчаливо предполагали, что имеем дело с функциями, определенными на множестве *вещественных чисел.* Но правые части равенств (11), (12), (13) имеют смысл и при подстановке вместо x *комплексного числа* $z = x + iy$. Тогда мы сможем сказать, что бы значило e^z, $\cos z$, $\sin z$.

Упражнение. Откройте вслед за Эйлером связывающую элементарные функции формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающее из неё замечательно красивое соотношение $e^{i\pi} + 1 = 0$, связывающее основные константы математических наук (арифметики, алгебры, анализа, геометрии и даже логики).

И что теперь?

Как говорится, «на пальцах», без подробностей и обоснований вам дано некоторое представление о дифференциальном исчислении — ядре первого семестра курса математического анализа. По дороге мы встретились с понятиями числа, функции, предела, производной, ряда ..., которых пока коснулись только поверхностно.

Теперь, когда вы знаете, зачем что нужно, придется на время погрузиться в подробное, тщательное рассмотрение всех этих понятий и объектов. Понимание их необходимо для профессионального математика. Пользователю это не обязательно. Большинство водит автомобиль, не открывая капот. Но это только потому, что кто-то хорошо разбирается в двигателях и сделал надежно работающий аппарат.