МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. А.М. Седлецкий

1 курс, 1 семестр.

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

1. Множества. Операции над множествами и их свойства. Отображения. Простейшая классификация отображений. Обратное отображение. Композиция отображений. Композиция биекций.

2. Аксиоматика и свойства вещественных чисел. Верхняя и нижняя грани числового множества. Лемма о верхней грани.

3. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона. Принцип Архимеда и его следствия. Геометрическая интерпретация вещественных чисел. Модуль числа и его свойства. Множества точек на прямой.

4. Лемма о вложенных отрезках. Лемма о конечном покрытии. Лемма о предельной точке.

5. Эквивалентные множества. Счетные множества и их свойства. Несчетность множества $[0, 1]$ и ее следствия. Мощность континуума. Сравнение мощности множества и мощности множества всех его подмножеств.

6. Предел последовательности. Определения и примеры. Ограниченность сходящейся последовательности. Предел и предельная точка. Единственность предела. Переход к пределу в неравенстве. Арифметические операции над пределами.

7. Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема о пределе монотонной последовательности. Число e.

8. Частичный предел последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательности. Их существование у ограниченной последовательности. Условия сходимости ограниченной последовательности. Бесконечно большие последовательности. Расширение множества вещественных чисел. Расширенный вариант теоремы Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы произвольной последовательности условия сходимости произвольной последовательности в широком смысле.

9. Предел функции в точке. Определение, примеры, отрицание. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Предел функции в точке по Гейне. Эквивалентность понятий предела по Коши и по Гейне. Единственность предела. Бесконечно малые функции и их свойства. Арифметические операции над пределами.

10. Переход к пределу (функции) в неравенстве. Предел промежуточной функции. Первый замечательный предел. Критерий Коши существования предела функции в точке. Предел монотонной функции.

11. Предел функции по базе. Наиболее употребительные базы. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми. Односторонние пределы. Предел композиции функций. Второй замечательный предел.

12. Непрерывность функции в точке. Определения, примеры ($y = \text{const}$, $y = x$, $y = \sin x$). Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва, примеры. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность многочлена рациональной и тригонометрических функций.

13. Глобальные свойства непрерывной функции на отрезке. Теорема о нуле непрерывной функции, промежуточные значения. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижимости точных граней.

14. Точки разрыва монотонной функции, их характер и мощность. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции. Обратные тригонометрические функции.

15. Построение показательной функции на основе теории пределов и непрерывности. Логарифмическая и степенная функции. Гиперболические функции. Обратные гиперболические функции.

16. Понятие равномерной непрерывности. Примеры. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке. Модуль непрерывности функции и его свойства.

17. Сравнение функций. Символы "O" и "o", их свойства. Примеры. Критерий эквивалентности функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых. Замена эквивалентных при вычислении пределов. Примеры.

18. Понятие производной функции. Механический и геометрический смысл. Дифференцируемость функции в точке, необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал и его геометрический смысл. Производная композиции функций. Инвариантность формы дифференциала. Производная обратной функции. Правила дифференцирования.

19. Таблица производных. Логарифмическое дифференцирование. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Параметрическое дифференцирование. Пример.

20. Теорема Ферма, Ролля, их геометрический смысл. Односторонние производные, геометрический смысл, связь с односторонней непрерывностью. Бесконечные производные. Теорема Дарбу.

21. Теорема Лагранжа и ее следствия: постоянство функции с нулевой производной, равномерная непрерывность функции с ограниченной производной, достаточное условие монотонности, доказательства неравенств, предел производной, характер точек разрыва производной.

22. Теорема Коши. Правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞). Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций.

23. Формула Тейлора. Остаточный член в общей форме. Остаточный член в форме Коши, Лагранжа, Пеано. Разложения элементарных функций по формуле Тейлора–Маклорена. Применения.

24. Исследование монотонности и экстремумов функции с помощью первой производной. Краевой экстремум, достаточное условие. Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке.

25. Выпуклые функции. Необходимое и достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции. Геометрический эквивалент выпуклости. Вогнутые функции.

26. Точки перегиба функции. Необходимое условие точки перегиба, достаточное условие. Исследование функции с помощью высших производных. Асимптоты графика функции.

27. Классические неравенства (Йенсена, Юнга, Гёльдера, Минковского, сравнение среднего геометрического со средним арифметическим).

28. Первообразная. Неопределенный интеграл Таблица интегралов. Интегрирование заменой переменной и по частям. Обобщенная первообразная.