МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. Т. П. Лукашенко

1 курс, 2 семестр.

Определённые интегралы Римана, Мак-Шейна и Курцвейля–Хенстока. Основная лемма о существовании разбиений. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Аддитивность интегралов по отрезкам. Интегрируемость производных по Курцвейлю–Хенстоку. Формула Ньютона–Лейбница и следствия из неё.

Верхняя мера Лебега и её свойства. Множества меры нуль по Лебегу. Интегрируемость ограниченных и непрерывных почти всюду функций по Риману и по Мак-Шейну. Ограниченность и непрерывность почти всюду интегрируемых по Риману функций. Связь интегралов Римана и Мак-Шейна. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.

Интегрируемость по Мак-Шейну функции, равной нулю почти всюду. Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность. Интегрируемость по Мак-Шейну ограниченных измеримых функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных.

Леммы Сакса–Хенстока. Непрерывность интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом. Интегрируемость по модулю функций, интегрируемых по Мак-Шейну. Покрытие в смысле Витали. Теоремы Витали. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом.

Определённые интегралы Римана–Стилтьеса, Мак-Шейна–Стилтьеса и Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса; их простейшие свойства. Критерии Коши интегрируемости. Интегрируемость на подотрезках. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам. Функции ограниченной вариации и их свойства. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций. Интегрируемость в смысле Римана–Стилтьеса непрерывных функций по функциям ограниченной вариации. Интегрирование по частям в интеграле Римана–Стилтьеса. Сведение интеграла Римана–Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Первая и вторая теоремы о среднем.

Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.

Метрические пространства. Нормированные пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$, норма и метрика в нём. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Компакты, их свойства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано–Вейерштрасса о существовании предельной точки. Последовательности в метрических, нормированных пространствах и в $\mathbb{R}^n$, их пределы, свойства. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров. Полнота $\mathbb{R}^n$.

Предел функции и его свойства (в метрических и нормированных пространствах). Непрерывные функции и их свойства (в метрических и нормированных пространствах). Принцип сжимающих отображений. Связные множества в метрических и нормированных пространствах и их свойства. Путь, длина пути и её свойства в метрических, нормированных пространствах и в $\mathbb{R}^n$.

Дифференцируемость отображений нормированных пространств. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент. Правила дифференцирования. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Равенство смешанных производных.

Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, интегральной и Пеано. Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Необходимые и достаточные условия его существования. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции. Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа его отыскания.