МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. В. И. Гаврилов

1 курс, 2 семестр.

1. Точная первообразная функция; множество точных первообразных на интервале. Неопределенный интеграл на интервале. Таблица неопределенных интегралов. Теорема о связи операций дифференцирования и интегрирования. Свойство линейности операции интегрирования. Интегрирование по частям и замена переменной интегрирования в неопределенном интеграле.

2. Функцию F, определенную на промежутке $\langle a, b\rangle$, назовем первообразной функцией для функции f на $\langle a, b\rangle$, если F непрерывна на $\langle a, b\rangle$, дифференцируема в точках интервала (a, b), за возможным исключением конечного множества K, и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)\backslash K$. Теорема о множестве первообразных функций на промежутке. Неопределенный интеграл на промежутке. Связь операций дифференцирования и интегрирования. Свойство линейности неопределенного интеграла на промежутке. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле на промежутке.

3. База размеченных разбиений отрезка. Интегральные суммы. Определение интеграла Римана; интегрируемые функции и дифференциальные формы. Критерий Коши интегрируемости функции на отрезке. Линейное векторное пространство $R[a, b]$. Необходимое условие интегрируемости функции. Геометрическая интерпретация интегральных сумм.

4. Суммы Дарбу; геометрическая иллюстрация. Свойство монотонности сумм Дарбу. Свойство отделимости множеств нижних и верхних сумм Дарбу. Связь сумм Дарбу с интегральными суммами. Суммы Дарбу непрерывной функции. Нижний и верхний интегралы Дарбу. Теорема Дарбу о существовании пределов сумм Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости функции на отрезке. Критерий интегрируемости функции в терминах ее колебаний на отрезках разбиения. Критерий интегрируемости функции, основанный на принципе разделяющего отрезка.

5. Интегрируемость непрерывной функции на отрезке. Интегрируемость ограниченной функции с конечным множеством точек разрыва на отрезке. Стирание конечного множества интегралом Римана. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость произведения функций. Свойство монотонности определенного интеграла. Оценка абсолютной величины определенного интеграла. Первая теорема о среднем значении. Свойство аддитивности определенного интеграла.

6. Квадрируемые фигуры на координатной плоскости; свойства площади. Критерий квадрируемости. Площадь между графиками.

7. Свойства непрерывности и дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Существование точной первообразной у непрерывной на отрезке функции. Существование первообразной функции у ограниченной на отрезке функции с конечным множеством точек разрыва. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегрирование подстановкой. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (и в форме Лагранжа). Вторая теорема о среднем значении; доказательство в частном случае. Формулы Бонне; доказательство теоремы в общем случае. Формула суммирования Эйлера–Маклорена.

8. Функции ограниченной вариации: теорема о представлении функции ограниченной вариации, алгебраические свойства, односторонние пределы.

9. Длина дуги кривой. Критерий спрямляемости дуги кривой, свойства спрямляемых кривых. Вычисление дуги класса C^1.

10. Несобственные интегралы по промежуткам; остаток интеграла. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Эталонные интегралы. Свойства линейности и монотонности несобственных интегралов. Интегрирование по частям и подстановкой несобственного интеграла. Критерий сходимости и признак сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная сходимость и оценка модуля несобственного интеграла. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Интегральные синус и

косинус. Неполная формула Стирлинга: $n! = cn^{n+1/2}e^{-n}(1+o(1))$, $n \to \infty$ с универсальной постоянной $c > 0$. *Вычисление $c = \sqrt{2\pi}$.

11. Интеграл Стилтьеса. Линейное свойство интеграла Стилтьеса. Интегрирование по частям. Интегрируемость непрерывной функции по функции ограниченной вариации. Вычисление интеграла Стилтьеса. Оценка модуля интеграла Стилтьеса. Теорема о среднем значении.

12. Метрическое пространство. Примеры метрик в $\mathbb{R}^m$, $R[a,b]$, $C[a,b]$, $C^{(k)}[a,b]$. Свойства окрестностей точки метрического пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Характеристические свойства замкнутых множеств. Свойства компактов в метрическом пространстве. Критерий компактного множества в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$.

13. Предел последовательности в метрическом пространстве и в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$; покоординатная сходимость. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства и полнота $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Основные базы в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Свойства предела функции нескольких действительных переменных в точке. Локальные свойства непрерывных функций нескольких действительных переменных. Повторные пределы функции нескольких переменных.

14. Предел и непрерывность отображения метрического пространства; критерий непрерывности отображения в терминах последовательностей. Покомпонентные критерии существования предела и непрерывности в точке отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Непрерывность композиции непрерывных отображений метрических пространств.

15. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств. Сжимающие отображения. Принцип неподвижной точки сжимающего отображения полного метрического пространства.

16. Характеристическое свойство непрерывного отображения открытого множества метрического пространства. Свойства непрерывных отображений и функций на компактах метрического пространства. Связные множества в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Непрерывный образ связного множества. Непрерывные функции на связных множествах в $\mathbb{R}^m$.

17. Частные производные первого порядка функции нескольких действительных переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы дифференциала при замене переменных. Геометрический смысл свойства дифференцируемости функции нескольких действительных переменных.

18. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких действительных переменных. Теорема о перестановке порядка дифференцирования. Формула для дифференциала n-го порядка.

19. Формулы Тейлора для функции нескольких действительных переменных с остаточным членом в интегральной форме и в форме Лагранжа.

20. Свойства нормы в $\mathbb{R}^m$. Необходимый признак локального экстремума функции нескольких действительных переменных. Достаточный признак локального экстремума.

21. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявной функции нескольких действительных переменных.

22. Дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Матрица Якоби. Критерий дифференцируемости отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявного отображения.

23. Отображения с не равным нулю якобианом. Принцип сохранения области. Теорема о функциональной независимости системы функций.

24. Условный экстремум. Постановка задачи. Необходимый признак условного экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа.