МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

проф. В. И. Гаврилов

1 курс, 1 семестр.

1. Аксиоматическое определение множества $\mathbb{R}$ действительных чисел в виде (линейно) упорядоченного поля. Числовая ось. Свойства абсолютной величины действительного числа.

2. Множества. Множество подмножеств. Операции над множествами и их свойства.

3. Основные числовые множества. Принципы минимальности и математической индукции. Неравенства Бернулли с натуральными и целыми показателями степени. Формула бинома.

4. Аксиома непрерывности (полноты) поля $\mathbb{R}$ в форме аксиомы отделимости числовых множеств. Свойство архимедовости множества $\mathbb{R}$. Целая часть действительного числа. Свойство плотности множеств рациональных и иррациональных чисел.

5. Свойство верхних граней числового множества; точная верхняя грань. Свойство нижних граней числового множества; точная нижняя грань. Принцип разделяющего отрезка. Принцип вложенных отрезков. Дедекиндово сечение. Эквивалентность перечисленных принципов полноты поля $\mathbb{R}$. Выпуклые числовые множества.

6. Отображения множеств; инъективные отображения, композиция отображений. Свойства образов и прообразов множеств при отображении. Биекция множеств; обратная биекция, композиция биекций.

7. Сравнение числовых множеств. Счетность множеств целых и рациональных чисел. Несчетность множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

8*. Натуральный ряд (аксиоматическое определение и свойства натуральных чисел).

9*. Изоморфизм полных упорядоченных полей.

10. Предел числовой последовательности; свойства единственности, локальности и линейности предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Предел и неравенства. Бесконечно малые последовательности. Асимптотическое представление сходящейся последовательности. Предел произведения и частного последовательностей. Оценочный признак существования предела последовательности; примеры. Предел монотонной последовательности. Существование на $\mathbb{R}$ предела функциональной последовательности $(a(n;x))$, $a(n;x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$; число "e". Свойства частичных пределов числовой последовательности, признак сходящейся последовательности. Теорема Больцано о выделении сходящейся подпоследовательности. Критерий Коши существования предела последовательности. Бесконечно большие последовательности. Сравнение последовательностей (n^p), $p \in \mathbb{N}$, и (a^n), $a > 1$.

11. Итерационные последовательности. Итерационная формула Герона. Простейшая форма принципа неподвижной точки для сжимающего отображения отрезка. Приложение к приближенному нахождению корней функциональных уравнений. Уравнение Кеплера. *Простейший итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

12*. Преобразование Теплица бесконечно малых и сходящихся последовательностей. Теорема Коши о пределе средней арифметической последовательности. Теорема Штольца о сходимости отношения бесконечно больших последовательностей.

13. Длина дуги окружности. Неравенства $|\sin x| \leqslant x$, $x \in \mathbb{R}$, и $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$.

14. Свойства окрестностей точки в $\mathbb{R}$. Точки прикосновения числового множества. Изолированные точки числового множества. Предельные точки числового множества; критерий предельной точки. Теорема Больцано о предельных точках числового множества. Свойства открытых и замкнутых множеств на $\mathbb{R}$. Теорема о виде открытого множества в $\mathbb{R}$. Теорема Бореля о выделении конечного открытого накрытия (для отрезка). *Теоремы Больцано и Бореля как принципы полноты поля $\mathbb{R}$.

15. Непрерывность функции в точке; критерий непрерывности в терминах последовательностей. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций, свойства локальности и сохранения знака непрерывной функции, *оценочный признак непрерывности функции в точке. Непрерывность композиции непрерывных функций. Непрерывность тригонометрических функций.

16. Свойства последовательностей Гейне числовой функции в предельной точке ее области определения. Определение Гейне предела функции в точке. Определение Коши предела функции в точке. Эквивалентность определений. Предел и непрерывность функции в точке. Окрестностное определение предела функции в точке; эквивалентность определению Коши. Критерий непрерывности функции во внутренней точке области определения. Критерий Коши существования предела в точке.

17. Общая теория предела. База множеств; примеры баз, свойства баз. Предел функции по базе; конкретные случаи. Единственность предела функции по базе. Свойство локальности и линейное свойство. Свойства сохранения неравенств для предела и ограниченности функции, имеющей предел по базе. Свойства сохранения знака и монотонности предела функции по базе. Бесконечно малые функции на базе. Асимптотическое разложение функции, имеющей предел по базе. Пределы произведения и частного функций по базе. Оценочный признак существования предела функции по базе. Бесконечно большие функции на базе. Теорема о пределе композиции функций по базе; следствие для непрерывной внешней функции. Свойства частичных пределов функции по базе. Колебание функции на множестве. Критерий ограниченности функции на множестве. Критерий Коши существования предела функции по базе.

18. Сравнение функций на базе; свойства символов "O"и "o", эквивалентность функций на базе.

19. Односторонние пределы числовой функции в точке и критерий существования предела функции в точке. Классификация точек разрыва числовой функции. Пределы числовых функций в неограниченных областях. Наклонные асимптоты графика функции.

20. Пределы $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, $x \to 0$, и $\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $x \to \infty$.

21. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о наименьшем и наибольшем значениях функции, теоремы Коши о нуле и промежуточных значениях функции, теорема Дарбу о непрерывном образе отрезка.

22. Теорема об односторонних пределах монотонной функции на промежутке; критерий непрерывности монотонной функции в точке. Множество точек разрыва монотонной функции на промежутке. Признак непрерывности монотонной функции на промежутке. Предел возрастающей функции на базе.

23. Теоремы о существовании и непрерывности обратной функции на отрезке и на промежутке. Теорема о гомеоморфизме промежутков.

24. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора–Гейне о равномерной непрерывности непрерывной функции на отрезке.

25. Существование, монотонность и непрерывность функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

26. Экспоненциальная функция $e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$, как решение на $\mathbb{R}$ функционального уравнения $f(x)f(y) = f(x+y)$; алгебраические свойства e^x. Неравенства $e^x \leqslant 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$, и $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$, $x < 1$. Строгое возрастание и непрерывность функции e^x на $\mathbb{R}$. Асимптотическое разложение $e^x = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$.

27. Существование, строгое возрастание и непрерывность натурального логарифма $\ln x$, $x > 0$; основные свойства натурального логарифма.

28. Монотонность и непрерывность степенной функции $e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; свойства степеней с произвольным показателем степени.

29. Показательная функция $\varphi_a(x) = \exp(x \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, и $a^x = \varphi_a(x)$, $0 < a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$; свойства монотонности и непрерывности на $\mathbb{R}$, алгебраические свойства.

30. Логарифмическая функция $\log_a x$, $x > 0$, $0 < a \neq 1$, как обратная функция для функции a^x; свойства монотонности и непрерывности, свойства логарифма.

31. Теорема: $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $x_k > 0$, $\alpha_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, как следствие неравенства $e^x \leqslant 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$, и свойств экспоненциальной и степенной функций. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положи-тельных чисел. Неравенство Юнга. Неравенства Гельдера, Коши–Буняковского и Минковского.

32. Дифференцируемость функции в точке, непрерывность дифференцируемой функции. Закон неравномерного прямолинейного движения материальной точки — пример дифферен-

цируемой функции. Производная функции в точке. Существование производной у дифференцируемой функции и обратное утверждение. Касательная к графику дифференцируемой функции. Односторонние производные; критерий существования производной функции в точке. Бесконечные производные.

33. Теорема: функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в некоторой ее окрестности $U(x_0)$ справедливо представление $f(x) - f(x_0) = k_f(x)(x - x_0)$, $x \in U(x_0)$, в котором функция k_f непрерывна в x_0 и $k_f(x_0) = f'(x_0)$. Линейное свойство операции дифференцирования. Производная произведения и частного функций. Производная композиции функций. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически.

34. Производные элементарных функций.

35. Производные высших порядков. Линейное свойство. Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения функций. Производные высших порядков элементарных функций.

36. Дифференциал; его геометрический смысл. Инвариантная форма дифференциала. Дифференциал суммы, произведения и частного. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}$. Дифференциалы высших порядков. 37. Локальные экстремумы функции. Теорема Ферма (необходимый признак локального экстремума дифференцируемой функции). Теорема Лагранжа о конечных приращениях; геометрическая интерпретация. Теорема Коши о конечных приращениях.

38. Правило Бернулли–Лопиталя; неопределенность вида $0/0$, неопределенность вида ∞/∞.

39. Многочлены Тейлора. Вспомогательные леммы. Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано). Единственность многочлена Тейлора в локальной формуле Тейлора. Асимптотические формулы для $\exp x$, $(1 + x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$. Формула Тейлора на промежутке с остаточным членом в форме Лагранжа. *Формула Тейлора на интервале с остаточным членом в форме Коши.

40. Критерий постоянства непрерывной функции на промежутке. Теорема о стирании конечного множества особенностей непрерывной функции на промежутке. Критерий монотонности дифференцируемой функции на промежутке. Критерий строгой монотонности дифференцируемой функции на промежутке.

41. Теорема о пределе производной функции в точке. Теорема о точках разрыва производной функции. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной функции. Применение теоремы Дарбу для доказательства правила Бернулли–Лопиталя в случае неопределенности ∞/∞.

42. Достаточный признак локального экстремума функции по ее первой производной. Правило изучения точек локального экстремума непрерывной функции. Достаточное условие строгого локального экстремума по знаку второй производной.

43. Выпуклые дифференцируемые функции на интервале. Критерий выпуклости дифференцируемой функции на интервале. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции на интервале. Неравенство Йенсена. Определение свойства выпуклости для произвольной функции на интервале. Доказательство эквивалентности двух определений выпуклости для дифференцируемых функций.

44. Определение точки перегиба функции. Необходимое условие точки перегиба дифференцируемой функции; геометрическая интерпретация. Необходимое условие точки перегиба дважды дифференцируемой функции. Достаточное условие точки перегиба по знаку второй производной. *Достаточное условие локального экстремума и точки перегиба по производной n-го порядка.