

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

проф. Е. Г. Скляренко

1/2 года, 1 курс, 2 семестр.

1. Линейные векторные пространства, примеры. Подпространства, линейные оболочки.
2. Линейная зависимость и независимость. Признаки зависимости, связанные с разложениями векторов. Свойства разложений по линейно независимым векторам.
3. Ранг множества векторов и его свойства. Размерность пространства, базисы, координаты.
4. Теоремы об изоморфизме векторных пространств.
5. Суммы и пересечения подпространств. Размерность суммы.
6. Прямые суммы двух и более подпространств. Внешняя прямая сумма.
7. Аффинные пространства, их однородность. Координатный репер, координаты векторов и точек.
8. Переход к новым координатам в аффинном и векторном пространствах, матрица перехода. Связь старых и новых координат точек и векторов (в том числе в тензорной записи).
9. Подпространства аффинного пространства. Параметрические уравнения. Параллелепипеды.
10. Аффинные подпространства как множества решений систем уравнений.
11. Взаимное расположение двух подпространств в аффинном пространстве.
12. Деление пары точек в данном отношении. Координаты делящей точки.
13. Теоремы об изоморфизме для аффинных пространств (в том числе в терминах отношения точек). Эквивалентность понятий аффинного и векторного пространства.
14. Скалярное произведение векторов. Евклидовы векторные и точечные пространства. Линейная независимость ортогональных векторов.
15. Ортонормированные базисы и реперы. Процесс ортогонализации.
16. Теоремы об изоморфизме для евклидовых векторных и точечных пространств. Следствия: длина вектора и расстояние между точками, неравенства треугольника, угол между векторами, перпендикулярность ортогональных векторов, теорема Пифагора, неравенство Коши–Буняковского. Примеры. Изоморфизмы как изометрии.
17. Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства. Угол вектора к подпространству. Удаленность вектора от подпространства.
18. Проекция вектора на подпространство. Коэффициенты Фурье. Метод наименьших квадратов решения переопределенных систем уравнений.
19. Нормальный вектор гиперплоскости. Расстояние от точки до гиперплоскости, между параллельными гиперплоскостями.
20. Определитель Грама и его свойства.
21. Объем k -мерного параллелепипеда. Объем и определитель матрицы перехода (при $k = n$).
22. Линейные отображения векторных пространств. Матрица и аналитические формулы линейного отображения.
23. Векторное пространство линейных отображений. Композиция линейных отображений, матрица композиции.
24. Размерность ядра и образа отображения. Условия изоморфизма.
25. Линейные операторы, их аналитические формулы. Зависимость матрицы оператора от базиса (в том числе в тензорной записи).
26. Кольцо линейных операторов. Изоморфизмы кольца матриц. Многочлены от операторов. Невырожденные операторы (полная линейная группа)
27. Инвариантные подпространства, влияние на вид матрицы оператора. Наличие инвариантных подпространств для полей действительных и комплексных чисел. Ступенчатый вид матрицы оператора.
28. Собственные векторы и собственные числа оператора. Собственные подпространства. Суммы собственных подпространств.

29. Характеристический полином оператора, инварианты. Уравнения для собственных подпространств.
30. Кратность собственного числа и размерность собственного подпространства. Условия диагонализруемости матрицы оператора.
31. Полиномы, аннулирующие оператор. Теорема Гамильтона–Кэли.
32. Вырожденность оператора, служащего множителем характеристического полинома от оператора.
33. Распадение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, отвечающее распадению характеристического полинома на взаимно простые множители.
34. Минимальный аннулирующий полином, его вид по отношению к характеристическому.
35. Корневые векторы оператора и корневые инвариантные подпространства.
36. Нормальная форма матрицы оператора на корневом подпространстве. Жорданова форма матрицы оператора. Вид минимального полинома.
37. Комплексификация вещественного пространства, линейного отображения и оператора.
38. Нормальная форма матрицы вещественного оператора.
39. Матричная интерпретация рекуррентных соотношений и жорданова форма.
40. Линейные отображения и преобразования аффинных пространств, связь с отношением трех точек. Аналитические формулы преобразований. Аффинные преобразования и понятие об аффинной классификации фигур.
41. Пространство линейных функций. Полулинейные функции. Сопряженные базисы, матрицы перехода. Преобразование координат линейных (полулинейных) функций при замене базиса.
42. Взаимная сопряженность пространства и пространства линейных (полулинейных) функций на нем. Взаимная сопряженность базисов.
43. Отображения и операторы сопряженных пространств, дуальные к отображениям и операторам основных пространств. Взаимная дуальность.
44. Билинейные и полуторалинейные функции, запись через координаты векторов. Векторные пространства функций. Базисные функции, отвечающие базису основного пространства.
45. Зависимость матрицы билинейной (полуторалинейной) функции от базиса (в том числе в тензорной записи). Ранг функции.
46. Ядра билинейной (полуторалинейной) функции, их размерность. Невырожденные функции.
47. Естественный изоморфизм пространства билинейных (полуторалинейных) функций пространству линейных отображений основного пространства в сопряженное.
48. Симметричные, кососимметричные и эрмитовы функции. Совпадение ядер.
49. Ортогональность векторов и подпространств относительно симметричных кососимметричных и эрмитовых функций. Размерность и свойства ортогонального дополнения.
50. Нормальный вид симметричной, кососимметричной и эрмитовой функций.
51. Единственность нормального вида функций. Закон инерции для симметричной (эрмитовой) функции над полем вещественных (комплексных) чисел.
52. Квадратичные функции, связь с билинейными и нормальный вид. Приведение к нормальному виду методом выделения полных квадратов.
53. Теорема Якоби и метод Грама приведения к нормальному виду.
54. Положительно определенные симметричные и эрмитовы функции. Критерий Сильвестра.
55. Симметричные, антисимметричные и эрмитовы скалярные произведения. Псевдоевклидовы, эрмитовы и симплектические векторные пространства, Теоремы об изоморфизме. Ортонормированные и симплектические базисы.
56. Естественный изоморфизм пространства со скалярным произведением своему сопряженному. Общий вид линейной (полулинейной) функции. Изотропные векторы и подпространства псевдоевклидова и эрмитова пространств. Линейная независимость ортого-

нальных неизотропных векторов. Определитель Грама. Процесс ортогонализации. Свойства ортогонального дополнения.

58. Симплектическое векторное пространство. Гамильтоновы базисы. Изотропные подпространства.

59. Унитарное пространство. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенства треугольника.

60. Ортогональные, псевдоортогональные, унитарные, псевдоунитарные и симплектические матрицы. Специальные линейные группы.

61. Операторы, сохраняющие скалярные произведения (ортогональные, псевдоортогональные, унитарные, псевдоунитарные и симплектические), их матрицы. Свойства инвариантных подпространств. Изометрии. Группы операторов.

62. Канонический вид ортогонального и унитарного операторов, его единственность. Собственные подпространства. Ортогональные преобразования точечных пространств.

63. Группы $O(1)$, $O(2)$, $U(1)$, $Sp(2)$, $O(1, 1)$. Псевдовращения плоскости, гиперболическая тригонометрия. Преобразования Лоренца. Трехмерное псевдоевклидово пространство.

64. Овеществление комплексного пространства. Псевдоевклидова и симплектическая структуры, определяемые эрмитовым пространством.

65. Овеществление операторов. Группа $U(p, q)$ как $O(2p, 2q) \cap Sp(2p + 2q)$.

66. Существование и единственность сопряженного оператора в пространстве со скалярным произведением. Связь с дуальным оператором сопряженного пространства. Свойства сопряженных операторов. Сопряженные к операторам, сохраняющим скалярное произведение.

67. Самосопряженные операторы в евклидовом и унитарном пространствах, канонический вид. Свойства собственных векторов и подпространств.

68. Полярные разложения оператора в композиции самосопряженных и ортогональных (унитарных).

69. Билинейные и полуторалинейные функции на пространстве со скалярным произведением. Естественный изоморфизм пространства таких функций пространству операторов.

70. Канонический вид симметричной (эрмитовой) функции на евклидовом (унитарном) пространстве. Приведение к каноническому виду уравнения гиперповерхности 2-го порядка в точечном пространстве.

71. Инварианты пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена. Поиск канонического базиса.

72. Тензоры. Примеры. Тензоры и полилинейные функции. Векторные пространства тензоров.

73. Умножение тензоров. Алгебра тензоров. Базисы и координаты в пространствах тензоров.

74. Операция свертки, ее свойства. Примеры.

75. Опускание и подъем индексов тензора в пространстве со скалярным произведением.

76. Симметрия и косая симметрия тензоров и их координат. Операции симметрирования и альтернирования тензоров и их свойства.

77. Кососимметричные тензоры. Операция внешнего умножения, свойства.

78. Простые поливекторы (и кососимметричные функции), их координаты. Примеры. Плюккеровы координаты подпространства.

79. Простота поливекторов (и кососимметричных функций) валентности $n - 1$.

80. Базис и размерность пространства поливекторов (кососимметричных функций).