

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

доц. В. М. Мануйлов

1/2 года, 1 курс, 2 семестр.

1. Линейное пространство. Определение, примеры. Линейная оболочка. Аффинное пространство.
2. Линейная (не)зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Размерность. Базис. Координаты.
3. Подпространство. Факторпространство. Теорема о сумме размерностей подпространства и факторпространства.
4. Пересечение и сумма подпространств. Теорема об их размерностях. Прямая сумма двух и более подпространств. Внешняя прямая сумма.
5. Двойственное пространство. Двойственный базис. Пример базиса в двойственном пространстве к пространству многочленов.
6. Изоморфизм линейных пространств. Второе двойственное пространство. Канонический изоморфизм между пространством и его вторым двойственным.
7. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения. Матрица линейного отображения. Зависимость от базиса.
8. Линейные операторы. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора и фактор-оператор. Вид матрицы оператора, обладающего инвариантным подпространством.
9. Собственные значения и собственные векторы. Существование нетривиальных инвариантных подпространств в случае алгебраически замкнутого поля.
10. Операторы проектирования. Их алгебраическая и геометрическая характеристика.
11. Нильпотентные операторы. Теорема о нормальной форме для нильпотентного оператора.
12. Собственные значения и собственные векторы. Корневые подпространства. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен.
13. Теорема Гамильтона–Кэли (доказательство для алгебраически замкнутых полей).
14. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств, (для алгебраически замкнутых полей).
15. Теорема Жордана о приведении к нормальной форме.
16. Овеществление и комплексификация линейных пространств и операторов.
17. Канонический изоморфизм $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong V \oplus V$. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств для операторов в вещественных линейных пространствах.
18. Евклидовы (унитарные) пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника.
19. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая.
20. Расстояние от вектора до подпространства, угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов.
21. Определитель Грама $G(a_1, \dots, a_n)$. Объем n -мерного параллелепипеда. Связь между $G(f(a_1), \dots, f(a_n))$ и $G(a_1, \dots, a_n)$, где f — оператор.
22. Изоморфизмы евклидовых (унитарных) пространств. Операторы, сохраняющие скалярное произведение. Изометрии.
23. Канонический вид унитарного оператора.
24. Канонический вид ортогонального оператора.
25. Самосопряженные и кососимметрические операторы, их канонический вид.
26. Нормальные операторы, связь нормальности с диагонализируемостью.
27. Неотрицательные и положительные операторы. Существование и единственность неотрицательного квадратного корня из неотрицательного оператора.
28. Полярное разложение операторов (доказательство для невырожденного случая).
29. Билинейные, полуторалинейные, квадратичные функции. Канонический изоморфизм $B(V) \cong L(V, V')$. Левое и правое ядро. Невырожденность.

30. Матрица билинейной (полуторалинейной) функции, ее изменение при заменах базиса. (Анти)симметричные и эрмитовы функции.
31. Ортогональное дополнение относительно (анти)симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции. Его размерность. Сумма подпространства и его ортогонального дополнения. Второе ортогональное дополнение.
32. Нормальный вид симметричных билинейных функций над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .
33. Нормальный вид эрмитовых полуторалинейных функций.
34. Нормальный вид антисимметричных билинейных функций.
35. Теорема инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра.
36. Группы $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(2m)$. Частные случаи.
37. Приведение симметрической билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции к каноническому виду в евклидовом пространстве.
38. Приведение пары квадратичных функций к диагональному виду.
39. Тензоры. Полилинейные функции. Примеры. Координатное определение тензоров.
40. Умножение тензоров. Базис в пространстве тензоров.
41. Свертка тензоров. Поднятие и опускание индексов.
42. Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризация и альтернирование. Внешнее умножение, его свойства.
43. Базис в пространстве кососимметрических тензоров.
44. Связь между линейной зависимостью и тривиальностью внешнего произведения.