

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ***Кафедра высшей алгебры**1/2 года, 1 курс, 2 семестр.*

1. Линейные пространства. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Переход от одного базиса к другому, матрица перехода, связь между координатами вектора в разных базисах. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности.

2. Подпространства линейного пространства, линейные оболочки, действия над пространствами: пересечение, объединение, сумма. Прямая сумма линейных подпространств.

3. Сопряженное линейное пространство, дуальные базисы. Второе сопряженное пространство, канонический изоморфизм.

4. Арифметическое пространство, плоскости и системы линейных уравнений.

5. Линейные отображения векторных пространств. Образ и ядро линейного отображения. Размерность ядра и образа. Критерий инъективности. Матричное задание.

6. Алгебра линейных операторов векторного пространства. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Определитель, след и ранг линейного оператора. Обратимость и невырожденность. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен и характеристические корни. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный аннулирующий многочлен, спектр и условия диагонализруемости линейного оператора. Существование одномерных или двумерных инвариантных подпространств линейного оператора вещественного пространства.

7. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора. Циклические подпространства. Нормальный базис нильпотентного оператора. Существование и единственность жордановой нормальной формы комплексной матрицы. Функции от матриц\*.

8. Билинейные функции и формы, их матрицы. Ранг билинейной функции. Симметрические и кососимметрические билинейные функции и формы. Положительно определенные квадратичные функции. Квадратичные функции и формы, их матрицы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Метод Якоби. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

9. Евклидово пространство. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта, ортонормированные базисы. Ортогональное дополнение линейного подпространства. Метрический изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности. Определитель Грама. Неравенство Коши–Буняковского. Геометрия евклидовых пространств: расстояния, углы, объемы. Векторное произведение\*. Сопряженное пространство евклидова пространства.

10. Линейные операторы евклидовых пространств. Сопряженный оператор и его матрица. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Полярное разложение линейного оператора.

11. Приведение вещественной квадратной формы к главным осям. Пара форм.

12. Унитарное пространство, существование ортонормированного базиса, матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому\*. Эрмитовы и унитарные операторы, их канонический вид.

13. Точечные аффинные пространства, их изоморфизм, координаты точки в разных системах координат. Подпространства. Евклидовы точечные пространства, их геометрия.

14. Аффинная группа, подгруппа сдвигов и подгруппа, оставляющая неподвижной точку. Группа движений точечного евклидова пространства. Классификация движений в 2-х и 3-мерном пространстве.

15. Квадратичные функции в аффинном пространстве, их центральные точки, канонический вид. Аффинная и метрическая классификация квадрик, их канонические типы.

16. Тензоры линейного пространства. Изменение координат тензора при переходе к другому базису. Операция свертки\*. Симметризация и альтернирование. Внешние формы.

17. Начала проективной геометрии\*. Проективные пространства. Проективная группа\*. Проективная классификация квадрик\*.

*Примечание.* Пункты, отмеченные звездочкой, могут быть опущены по усмотрению лектора.